CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS CTA/SD option Scientifique
CONCOURS 2009 - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice I

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 4y = \cos x$.

On en cherche toutes les solutions f, définies sur l'ensemble des réels, telles que $f(0) = 0$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).

2) Soit (F) l'équation différentielle : $y' - 4y = 0$.
Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $f - p$ est solution de (F).

3) En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = ce^{4x} - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$.

4) En déduire qu'il existe une seule solution de (E), que l'on déterminera, qui vérifie : $f(0) = 0$.

Exercice II

Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

On définit de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ l'application f par : $f(z) = \frac{1}{z}$.

1) Déterminer les parties réelles et imaginaires des images de $\alpha = 1 + i$ et de $\beta = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) a) Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.

b) Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = \overline{z}$.

c) Déterminer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de ceux de z.

d) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de z.

3) En étudiant $f \circ f$, montrer que f est bijective.

4) Montrer que $f(z) - 1 = \frac{1}{z}(1 - z)$.
En déduire que si $|z - 1| = 1$ alors $|f(z)| = |f(z) - 1|$.

5) Si $z \notin \mathbb{R}$, on définit $Q(z) = \dfrac{z - \frac{1}{2}}{z - 2}$.
Montrer que $Q(z)Q(f(z))$ est un réel que l'on déterminera.

6) Dans le plan complexe, soit O le point d'affixe 0, A le point d'affixe 1, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.
Si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1, donner une construction de M'.

Exercice III

On fabrique à la chaîne un composant électronique ; le procédé utilisé donne une proportion de d composants défectueux. On fait donc un test des composants à la sortie de la chaîne.
Si un composant est bon, il est accepté avec une probabilité de 0,98.
Si un composant est défectueux, il est refusé avec une probabilité de r.
Soit A l'événement « *le composant est accepté* », et soit D l'événement « *le composant est défectueux* ».

1) Déterminer la probabilité de A.

2) Déterminer la probabilité de D sachant A.

3) r étant imposé par le procédé de vérification employé, quelle inégalité doit vérifier d si on veut que dans le lot accepté il y ait, en moyenne, au plus 5% de composant défectueux ?

Exercice IV

Soit les deux suites (I_n) et (J_n) définies par :

$$I_n = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \text{ et } J_n = \frac{I_n}{e^{2n}} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1) Calculer I_1 , $I_0 + I_1$ et I_0.

2) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3) Démontrer que : $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} \le I_n \le \dfrac{e^{2n}-1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(on pourra prouver que, sous certaines conditions à préciser, $2 \le 1+e^x \le 1+e^2$.

4) En déduire les limites de (I_n) et (J_n).

5) Calculer, en fonction de n, la valeur de $I_n + I_{n+1}$.

En déduire une méthode permettant le calcul explicite de I_n en fonction de n.