CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS CTA/SD option Scientifique
CONCOURS 2009
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice I

Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 4y = \cos x$.

On en cherche toutes les solutions f, définies sur l'ensemble des réels, telles que $f(0) = 0$.

1) Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = a\cos x + b\sin x$ soit solution de (E).

La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p'(x) = -a\sin x + b\cos x$.

La fonction p sera solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$p'(x) - 4p(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow -a\sin x + b\cos x - 4(a\cos x + b\sin x) = \cos x$

$\Leftrightarrow (b-4a)\cos x + (-4b-a)\sin x = \cos x$

Pour $x = 0$, cette égalité donne : $(b-4a)\cos 0 + (-4b-a)\sin 0 = \cos 0 \Leftrightarrow b - 4a = 1$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$, cette égalité donne : $(b-4a)\cos\frac{\pi}{2} + (-4b-a)\sin\frac{\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -4b - a = 0$.

Les réels a et b sont solutions du système $\begin{cases} b-4a=1 \\ -4b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-4(-4b)=1 \\ a=-4b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17b=1 \\ a=-4b \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} b=\frac{1}{17} \\ a=-\frac{4}{17} \end{cases}}$

2) Soit (F) l'équation différentielle : $y' - 4y = 0$.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est solution de (E) si et seulement si on a les équivalences suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f'(x) - 4f(x) = \cos x$

$\Leftrightarrow f'(x) - 4f(x) = p'(x) - 4p(x)$ car la fonction p est solution de (E)

$\Leftrightarrow (f-p)'(x) - 4(f-p)(x) = 0$ par linéarité de la dérivation

ce qui équivaut à affirmer que $f - p$ est solution de l'équation (F).

3) En déduire que les solutions de (E) sont les fonctions $f(x) = ce^{4x} - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$.

Les solutions de l'équation (F) : $y' - 4y = 0$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ce^{4x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est solution de (E) si et seulement $f - p$ est solution de l'équation (F), donc si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f-p)(x) = ce^{4x} \Leftrightarrow f(x) = ce^{4x} + p(x) \Leftrightarrow f(x) = ce^{4x} - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$, $c \in \mathbb{R}$

4) En déduire qu'il existe une seule solution de (E), que l'on déterminera, qui vérifie : $f(0) = 0$.

Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ce^{4x} - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$, $c \in \mathbb{R}$.

$f(0) = 0$ implique $ce^{4\times 0} - \frac{4}{17}\cos 0 + \frac{1}{17}\sin 0 = 0 \Leftrightarrow c - \frac{4}{17} = 0 \Leftrightarrow c = \frac{4}{17}$.

L'unique solution de l'équation (E) vérifiant $f(0) = 0$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = -\frac{4}{17}e^{4x} - \frac{4}{17}\cos x + \frac{1}{17}\sin x$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice II

Soit $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls. On définit de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$ l'application *f* par : $f(z)=\frac{1}{z}$.

1) Déterminer les parties réelles et imaginaires des images de $\alpha=1+i$ et de $\beta=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$.

L'image de $\alpha=1+i$ est $f(\alpha)=f(1+i)=\frac{1}{1+i}=\frac{1\times(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1^2-i^2}=\frac{1-i}{1^2-i^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

$$\boxed{\text{Les parties réelles et imaginaires de } f(\alpha) \text{ sont } \operatorname{Re}[f(\alpha)]=\frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{Im}[f(\alpha)]=-\frac{1}{2}}$$

L'image de $\beta=1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ est :

$$f(\beta)=f\left(1+e^{i\frac{\pi}{3}}\right)=\frac{1}{1+e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{3+i\sqrt{3}}.$$

$$=\frac{2\left(3-i\sqrt{3}\right)}{\left(3+i\sqrt{3}\right)\left(3-i\sqrt{3}\right)}=\frac{6-i2\sqrt{3}}{3^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{6-i2\sqrt{3}}{9+3}=\frac{6-i2\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{\text{Les parties réelles et imaginaires de } f(\beta) \text{ sont } \operatorname{Re}[f(\beta)]=\frac{1}{2} \text{ et } \operatorname{Im}[f(\beta)]=-\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

2) a) Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=z$.

On résout : $f(z)=z \Leftrightarrow \frac{1}{z}=z \Leftrightarrow z^2=1 \Leftrightarrow \boxed{z=1 \text{ ou } z=-1}$

b) Déterminer les éléments de $\mathbb{C}^*$ tels que $f(z)=\bar{z}$.

On résout : $f(z)=\bar{z} \Leftrightarrow \frac{1}{z}=\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$ car $|z|\geq 0$

$$\boxed{\text{L'ensemble des complexes vérifiant } f(z)=\bar{z} \text{ est donc l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire de la forme } z=e^{i\theta},\ \theta\in\mathbb{R}}$$

c) Déterminer le module et un argument de $f(z)$ en fonction de ceux de *z*.

Puisque pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $f(z)=\frac{1}{z}$, on aura :

$\boxed{|f(z)|=\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}}$ et $\boxed{\arg(f(z))}=\arg\left(\frac{1}{z}\right)=\arg(1)-\arg(z)\boxed{=-\arg(z)}$ à 2π près.

d) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de celles de *z*.

Si on note $z=x+iy$, *x* et *y* réels non simultanément nuls, on aura :

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1\times(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{x-iy}{x^2-(iy)^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Ainsi $\boxed{\operatorname{Re}[f(z)]=\frac{x}{x^2+y^2} \text{ et } \operatorname{Im}[f(z)]=-\frac{y}{x^2+y^2} \text{ avec } x=\operatorname{Re}(z) \text{ et } y=\operatorname{Im}(z)}$.

3) En étudiant $f\circ f$, montrer que *f* est bijective.

Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $(f\circ f)(z)=\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{1/z}=z$. Puisque pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $(f\circ f)(z)=z$, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bijective, de bijection réciproque } f^{-1}(z)=f(z)}$

jgcuaz@hotmail.com

4) Montrer que $f(z)-1=\frac{1}{z}(1-z)$. En déduire que si $|z-1|=1$ alors $|f(z)|=|f(z)-1|$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $f(z)-1=\frac{1}{z}-1=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\times z=\frac{1}{z}(1-z)$.

Puisque pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $f(z)-1=\frac{1}{z}(1-z)=f(z)(1-z)$, on aura . $|f(z)-1|=|f(z)||1-z|=|f(z)||z-1|$.

Ainsi, si $|z-1|=1$ alors $|f(z)-1|=|f(z)|\times 1=|f(z)|$.

5) Si $z\notin\mathbb{R}$, on définit $Q(z)=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}$. Montrer que $Q(z)Q(f(z))$ est un réel que l'on déterminera.

Pour tout $z\notin\mathbb{R}$, $Q(z)Q(f(z))=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}\times\dfrac{f(z)-\frac{1}{2}}{f(z)-2}=\dfrac{z-\frac{1}{2}}{z-2}\times\dfrac{\frac{1}{z}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{z}-2}$

$$=\frac{\frac{2z-1}{2}}{z-2}\times\frac{\frac{2-z}{2z}}{\frac{1-2z}{z}}=\frac{2z-1}{2(z-2)}\times\frac{2-z}{2z}\times\frac{z}{1-2z}\boxed{=\frac{1}{4}}$$

6) Dans le plan complexe, soit O le point d'affixe 0, A le point d'affixe 1, M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$. Si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1, donner une construction de M'.

Si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1, alors $|z-1|=1$.

D'après la question 4) on aura $|f(z)|=|f(z)-1|\Leftrightarrow|f(z)-0|=|f(z)-1|\Leftrightarrow OM'=AM'$.

Le point M' est donc équidistant des points O et A, donc sur la médiatrice du segment [OA].

Dans la question 2) d), on a démontré que pour tout $z\in\mathbb{C}^*$, $\arg(f(z))=-\arg(z)$ à 2π près, ce qui se traduit géométriquement par $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$.

Le point M' est donc situé sur la droite symétrique de (OM) par rapport à l'axe des abscisses.

Si M est sur le cercle de centre A et de rayon 1, pour construire le point M', on effectuera donc les opérations suivantes :

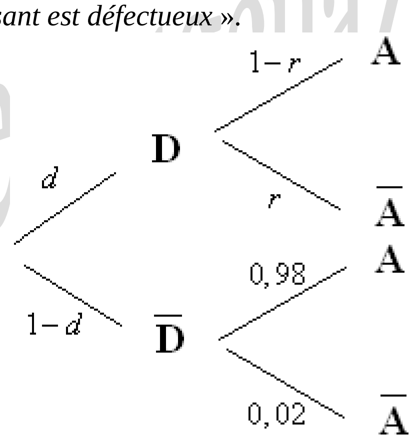
- Construire le symétrique N du point M par rapport à l'axe des abscisses. Ce point N appartient également au cercle de centre A et de rayon 1. - Le point M' sera à l'intersection de la droite (ON) et de la médiatrice de (OA).

<u>Exercice III</u>

On fabrique à la chaîne un composant électronique ; le procédé utilisé donne une proportion de *d* composants défectueux.
On fait donc un test des composants à la sortie de la chaîne.
Si un composant est bon, il est accepté avec une probabilité de 0,98.
Si un composant est défectueux, il est refusé avec une probabilité de *r*.
Soit A l'événement « *le composant est accepté* », et soit D l'événement « *le composant est défectueux* ».

L'énoncé nous informe que $p(D)=d$ donc $p(\overline{D})=1-d$, puis $p_{\overline{D}}(A)=0{,}98$ donc $p_{\overline{D}}(\overline{A})=0{,}02$ et $p_D(\overline{A})=r$ donc $p_D(A)=1-r$.

On peut résumer cette situation par l'arbre de probabilité suivant :



jgcuaz@hotmail.com

1) Déterminer la probabilité de A.

Le système $\left(D\cap A;\overline{D}\cap A\right)$ constitue une partition de l'événement A. La formule des probabilités totales nous permet donc d'écrire que :

$$p(A)=p(D\cap A)+p\left(\overline{D}\cap A\right)=p(D)\,p_D(A)+p\left(\overline{D}\right)p_{\overline{D}}(A)$$

$$\boxed{=d(1-r)+(1-d)\times 0{,}98}$$

2) Déterminer la probabilité de D sachant A.

On calcule $p_A(D)=\dfrac{p(D\cap A)}{p(A)}=\dfrac{d(1-r)}{d(1-r)+(1-d)\times 0{,}98}=\dfrac{d(1-r)}{0{,}02d-dr+0{,}98}$

3) r étant imposé par le procédé de vérification employé, quelle inégalité doit vérifier d si on veut que dans le lot accepté il y ait, en moyenne, au plus 5% de composant défectueux ?

On cherche à déterminer une inégalité que doit vérifier d pour que $p_A(D)\leq 0{,}05$

$$p_A(D)\leq 0{,}05\Leftrightarrow\frac{d(1-r)}{0{,}02d-dr+0{,}98}\leq 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow d(1-r)\leq 0{,}05(0{,}02d-dr+0{,}98)$$

$$\Leftrightarrow d-dr\leq 0{,}0001d-0{,}05dr+0{,}049$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9999d-0{,}95dr\leq 0{,}049$$

$$\Leftrightarrow d(0{,}9999-0{,}95r)\leq 0{,}049$$

$$\Leftrightarrow d\leq\frac{0{,}049}{0{,}9999-0{,}95r}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow d\leq\frac{490}{9999-9500r}}$$

Exercice IV

Soit les deux suites (I_n) et (J_n) définies par : $I_n=\int_0^2\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$ et $J_n=\frac{I_n}{e^{2n}}$ pour tout entier naturel n.

1) Calculer I_1 , I_0+I_1 et I_0.

On calcule $I_1=\int_0^2\frac{e^x}{1+e^x}dx=\left[\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^2=\ln\left(1+e^2\right)-\ln\left(1+e^0\right)=\ln\left(1+e^2\right)-\ln(2)\boxed{=\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)}$,

puis $I_0+I_1=\int_0^2\frac{1}{1+e^x}dx+\int_0^2\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{1}{1+e^x}+\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{1+e^x}{1+e^x}dx=\int_0^2 1dx=[x]_0^2\boxed{=2}$.

On en déduit $I_0=2-I_1\boxed{=2-\ln\left(\frac{1+e^2}{2}\right)}$

2) Montrer que la suite (I_n) est croissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on calcule $I_{n+1}-I_n=\int_0^2\frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx-\int_0^2\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{(n+1)x}-e^{nx}}{1+e^x}dx=\int_0^2\frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}dx$.

Pour tout $x\in[0;2]$, $1+e^x>0$, $e^x-1\geq 0$ et $e^{nx}>0$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}\geq 0$

et par positivité de l'intégrale, $\int_0^2\frac{e^{nx}\left(e^x-1\right)}{1+e^x}dx\geq 0\Leftrightarrow I_{n+1}-I_n\geq 0\Leftrightarrow I_{n+1}\geq I_n$, ce qui nous permet d'en déduire que $\boxed{\text{la suite }(I_n)\text{ est croissante}}$.

jgcuaz@hotmail.com

3) Démontrer que : $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} \leq I_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(on pourra prouver que, sous certaines conditions à préciser, $2 \leq 1+e^x \leq 1+e^2$).

Pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leq x \leq 2$, puis par croissance de la fonction exponentielle, $1 \leq e^x \leq e^2$, et par suite $2 \leq 1+e^x \leq 1+e^2$ et $\dfrac{1}{1+e^2} \leq \dfrac{1}{1+e^x} \leq \dfrac{1}{2}$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0;2]$, $e^{nx} > 0$, on aura $\dfrac{e^{nx}}{1+e^2} \leq \dfrac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \dfrac{e^{nx}}{2}$.

Par passage aux intégrales dans les inégalités, on aura : $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx \leq \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \leq \int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx$

On calcule successivement $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx = \frac{1}{1+e^2}\int_0^2 e^{nx}dx = \frac{1}{1+e^2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2 = \frac{1}{1+e^2}\left[\frac{1}{n}e^{2n}-\frac{1}{n}e^{0\times n}\right] = \frac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)}$

et $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{nx}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}e^{2n}-\frac{1}{n}e^{0\times n}\right] = \frac{e^{2n}-1}{2n}$.

L'inégalité $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^2}dx \leq \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \leq \int_0^2 \frac{e^{nx}}{2}dx$ c'est-à-dire $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} \leq I_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2n}$ est démontrée.

4) En déduire les limites de $\left(I_n\right)$ et $\left(J_n\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)} = \dfrac{1}{1+e^2}\times\left(2\times\dfrac{e^{2n}}{2n}-\dfrac{1}{n}\right)$. D'après une limite du cours, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}}{2n} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} = +\infty$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$, on en déduit par différence et par produit, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{n\left(1+e^2\right)} = +\infty$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)}$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} = +\infty$, on en déduit par minoration que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{2n}-1}{n\left(e^2+1\right)} \leq I_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2n}$ et $e^{2n} > 0$ donc $\dfrac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} \leq \dfrac{I_n}{e^{2n}} \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$, c'est-à-dire $\dfrac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} \leq J_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} = \dfrac{e^{2n}\left[1-\dfrac{1}{e^{2n}}\right]}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} = \dfrac{1-\dfrac{1}{e^{2n}}}{n\left(e^2+1\right)}$. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{2n} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n}} = 0$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(e^2+1\right) = +\infty$, on aura par différence et quotient, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}} = \dfrac{e^{2n}\left[1-\dfrac{1}{e^{2n}}\right]}{2ne^{2n}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{e^{2n}}}{2n}$. Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{2n}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, on en conclut par différence et quotient que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}} = 0$.

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} \leq J_n \leq \dfrac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}}$ et puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{ne^{2n}\left(e^2+1\right)} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{2n}-1}{2ne^{2n}} = 0$, on en conclut, grâce au théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0}$

5) Calculer, en fonction de *n*, la valeur de $I_n + I_{n+1}$.

En déduire une méthode permettant le calcul explicite de I_n en fonction de *n*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule :

$$I_n + I_{n+1} = \int_0^2 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx + \int_0^2 \frac{e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx = \int_0^2 \frac{e^{nx}+e^{(n+1)x}}{1+e^x}dx = \int_0^2 \frac{e^{nx}\left(1+e^x\right)}{1+e^x}dx = \int_0^2 e^{nx}dx = \left[\frac{1}{n}e^{nx}\right]_0^2 = \boxed{\frac{1}{n}\left(e^{2n}-1\right)}.$$

Pour calculer I_n en fonction de *n*,

- connaissant $I_1 = \ln\left(\dfrac{1+e^2}{2}\right)$,
- on calcule $I_1 + I_2 = e^2 - 1$ d'où on tirera la valeur de I_2
- on calcule $I_2 + I_3 = \dfrac{1}{2}\left(e^4 - 1\right)$ d'où on tirera la valeur de I_3

et de proche en proche....

connaissant I_n, on calcule $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n}\left(e^{2n} - 1\right)$ d'où on tirera la valeur de I_{n+1}

fin du corrigé

jgcuaz@hotmail.com