CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS CTA/SD option Scientifique
CONCOURS 2007
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

1) En réécrivant autrement le polynôme P, à savoir :

$P(z)=z^3-22z-36+i\left(9z^2+12z-12\right)=z^3-22z-36+3i\left(3z^2+4z-4\right)$, on s'apperçoit que si z_1 est une racine réelle de P, alors on doit avoir nécessairement $z_1^3-22z_1-36=0$ et $3z_1^2+4z_1-4=0$. Cherchons donc les racines **réelles** du polynôme $R(z)=3z^2+4z-4$ en calculant son discriminant : $\Delta=4^2-4\times3\times(-4)=16+48=64=8^2$ d'où l'existence de deux racines réelles $\dfrac{-4-\sqrt{64}}{2\times3}=-2$ et $\dfrac{-4+\sqrt{64}}{2\times3}=\dfrac{2}{3}$. Sur ces deux racines, seule –2 est racine du polynôme $S(z)=z^3-22z-36$. Ainsi la seule racine réelle de P est $\boxed{z_1=-2}$

2) Il existe donc un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=\left(z-(-2)\right)Q(z)\Leftrightarrow P(z)=(z+2)Q(z)$, avec $\deg Q=\deg P-1=2$, donc de la forme $Q(z)=az^2+bz+c$.

Pour trouver Q, effectuons la division euclidienne du polynôme P par z-2 (puisque l'égalité ci-dessus entraîne $Q(z)=\dfrac{P(z)}{z+2}$, pour tout $z\neq-2$)

On obtient :

$$
\begin{array}{l|l}
z^3+9iz^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & z+2 \\
\hline
z^3+2z^2 & z^2+(9i-2)z\ -6i-18 \\
\quad (9i-2)z^2+2(6i-11)z-3(4i+12) & \\
\quad (9i-2)z^2+2(9i-2)z & \\
\qquad\qquad (-6i-18)z-3(4i+12) & \\
\qquad\qquad (-6i-18)z-12i-36 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Le polynôme Q est donc :

$\boxed{Q(z)=z^2+(9i-2)z-6(i+3)}$

3) On calcule le discriminant du polynôme Q :

$\Delta=(9i-2)^2-4\times1\times\left(-6(i+3)\right)=-81-36i+4+24i+72=-5-12i$. L'astuce est de remarquer que $-5-12i=(2-3i)^2$, ce qui permet de calculer les deux racines complexes de Q : L'une vaut $\dfrac{-(9i-2)-(2-3i)}{2}=\dfrac{-6i}{2}=-3i$ et l'autre vaut $\dfrac{-(9i-2)+(2-3i)}{2}=\dfrac{-12i+4}{2}=-6i+2$. L'équation Q($z$)=0 admet donc une solution imaginaire pure : $\boxed{z_2=-3i}$

4) L'autre solution de l'équation Q(z)=0 ayant été calculée ci-dessus, et par application de la règle du produit nul,

$P(z)=0\Leftrightarrow(z+2)Q(z)=0\Leftrightarrow z+2=0$ ou $Q(z)=0$ et ainsi $\boxed{S=\{-2;-3i;-6i+2\}}$

5) Notons A le point d'affixe $z_1=-2$, B le point d'affixe $z_2=-3i$ et C le point d'affixe $z_3=-6i+2$

L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ vaut $z_2-z_1=-3i+2$. Celle du vecteur $\overrightarrow{AC}$ vaut $z_3-z_1=-6i+4$

Puisque $z_3-z_1=2(z_2-z_1)$, on en déduit que $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc que les points A,B et C sont alignés

Exercice n°2

1) Pour n=0, on doit calculer $I_0=\displaystyle\int_0^1\frac{t^0}{0!}e^{1-t}dt$. En convenant que 0 !=1, et puisque pour tout t>0, $t^0=1$ (on convient que $0^0=1$) le calcul est donc $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{1-t}dt=\left[-e^{1-t}\right]_0^1=-e^0+e^1\boxed{=e-1}$

Pour n=1, on doit calculer $I_1=\int_0^1 \frac{t^1}{1!}e^{1-t}dt=\int_0^1 te^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=t\Rightarrow u'(t)=1$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1].

Ainsi $I_1=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt=\left[-te^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1 e^{1-t}dt=-1\times e^0+0\times e^1+I_0=-1+(e-1)\boxed{=e-2}$

2) Pour tout entier n non nul, $I_n=\int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt=\int_0^1 u(t)v'(t)dt$ avec $u(t)=\frac{t^n}{n!}\Rightarrow u'(t)=\frac{nt^{n-1}}{n!}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v'(t)=e^{1-t}\Rightarrow v(t)=-e^{1-t}$ qui sont continûment dérivables sur [0 ;1]. Ainsi $I_n=\left[u(t)v(t)\right]_0^1-\int_0^1 u'(t)v(t)dt$ $=\left[-\frac{t^n}{n!}e^{1-t}\right]_0^1+\int_0^1\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{1-t}dt=-\frac{1}{n!}+\frac{0^n}{n!}e^{1-0}+I_{n-1}$ d'où la relation $\boxed{I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!}}$

3) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$. Notons $Q(k)$ la propriété « $I_k=e-\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}$ »

<u>Initialisation :</u> La propriété est vraie pour k=0 car $e-\sum_{p=0}^{0}\frac{1}{p!}=e-\frac{1}{0!}=e-1$ (par convention 0 !=1), et puisqu'on a calculé $I_0=e-1$ dans la question 1)

<u>Hérédité</u> : Supposons la propriété vraie $Q(m)$ pour un entier m fixé, à savoir $I_m=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}$.

On a alors, d'après la question 2), $I_{m+1}=I_m-\frac{1}{(m+1)!}$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence, $I_{m+1}=e-\sum_{p=0}^{m}\frac{1}{p!}-\frac{1}{(m+1)!}=e-\sum_{p=0}^{m+1}\frac{1}{p!}$, ce qui est la propriété à l'ordre m+1, et achève donc la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

<u>Conclusion :</u> La propriété $I_n=e-\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}$ est vraie pour tout entier n

4) Posons, pour tout entier n non nul, $f_n(t)=t^ne^{1-t}$.

Pour tout entier n non nul, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, $f_n'(t)=nt^{n-1}e^{1-t}-t^ne^{1-t}=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)$

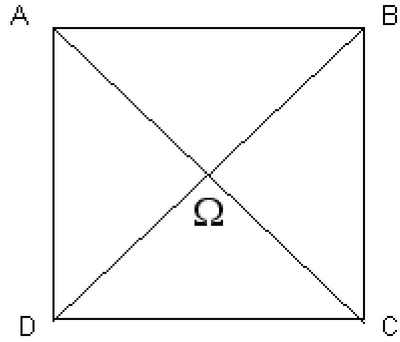
Si n est un entier non nul, donc supérieur à 1, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n'(t)=t^{n-1}e^{1-t}(n-t)\geq 0$, donc que f_n est croissante sur [0 ;1]. Elle atteint donc son maximum lorsque t=1, lequel maximum vaut $f_n(1)=1^ne^{1-1}=1$. Ainsi, on peut affirmer que pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)\leq 1$. On passe aux inégalités dans l'intégrale. Ainsi $I_n=\int_0^1\frac{t^n}{n!}e^{1-t}dt\leq\int_0^1\frac{1}{n!}dt\leq\frac{1}{n!}(1-0)$. L'inégalité $I_n\leq\frac{2}{n!}$ (et même $I_n\leq\frac{1}{n!}$!) est donc vérifiée pour tout n non nul

Enfin, puisque pour tout $t\in[0,1]$, $f_n(t)=t^ne^{1-t}>0$, l'inégalité $I_n\geq 0$ est vérifiée par positivité de l'intégrale d'une fonction positivie. Ainsi, pour tout entier naturel n non nul, $\boxed{0\leq I_n\leq\frac{2}{n!}}$

5) Puisque $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n!}=0$, le théorème d'encadrement « des gendarmes » nous permet de conclure que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}I_n=0}$ (ce qui permet, au passage, d'étalir le résultat $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p!}=e}$)

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°3



1) L'événement Ω_1, « la puce se trouve en Ω à l'issue du 1er saut » est impossible car la puce se trouvait en Ω au départ, et l'a donc quitté à la fin du 1er saut .

Ainsi $\boxed{p_1 = p(\Omega_1) = 0}$

Après ce premier saut, la puce se trouve en A,B,C ou D. Quel que soit le sommet sur lequel elle se trouve, elle peut joindre de manière équiprobable soit le sommet Ω soit l'un de ces deux sommets adjacents (par exemple, si elle est en A, elle peut se rendre en B,D ou Ω). Ainsi $\boxed{p_2 = p(\Omega_2) = \frac{1}{3}}$

2) Après chaque saut, la puce pouvant se trouver sur l'un quelconque des 5 points, la somme des probabilités des 5 événements $A_n, B_n, C_n, D_n, \Omega_n$ vaut 1. Ainsi $p(A_n) + p(B_n) + p(C_n) + p(D_n) + p_n = 1$

Et comme au départ, les 4 sommets A,B,C et D pouvait être atteints avec la probabilité lors du premier saut de puce, on aura donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n)$ (alors que ces nombres sont différents de p_n puisque le sommet Ω était « favorisé » dès le départ.

L'égalité $p(A_n) + p(B_n) + p(C_n) + p(D_n) + p_n = 1$ se réécrit donc $4p(A_n) + p_n = 1 \Leftrightarrow \boxed{p(A_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n)}$

Enfin, puisque $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n)$, on obtient l'égalité attendue :

$$\boxed{p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n)}$$

3) Si après un saut, la puce se trouve en A,B,C ou D, on a vu qu'elle pouvait revenir en Ω avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, et se rendre vers un autre sommet avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$

Si, en revanche, après un saut, la puce se trouve en Ω, elle ne peut pas s'y trouver au saut suivant.

On a ainsi établi les probabilités conditionnelles :

$$p_{\Omega_n}(\Omega_{n+1}) = 0,\ p_{\Omega_n}\left(\overline{\Omega_{n+1}}\right) = 1,\ p_{\overline{\Omega_n}}(\Omega_{n+1}) = \frac{1}{3} \text{ et } p_{\overline{\Omega_n}}\left(\overline{\Omega_{n+1}}\right) = \frac{2}{3}$$

On applique alors la **formule des probabilités totales** au système complet d'événement $\left(\Omega_n ; \overline{\Omega_n}\right)$, pour écrire :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{n+1} = p(\Omega_{n+1}) = p(\Omega_n \cap \Omega_{n+1}) + p\left(\overline{\Omega_n} \cap \Omega_{n+1}\right) = p(\Omega_n)\, p_{\Omega_n}(\Omega_{n+1}) + p\left(\overline{\Omega_n}\right) p_{\overline{\Omega_n}}(\Omega_{n+1})$$

$$= p_n \times 0 \qquad + (1 - p_n) \times \frac{1}{3}$$

On a ainsi établi la formule $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule $q_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - p_n) - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}p_n + \frac{1}{12}$

En factorisant par $-\frac{1}{3}$, on obtient $q_{n+1} = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3}q_n$, ce qui prouve que la suite

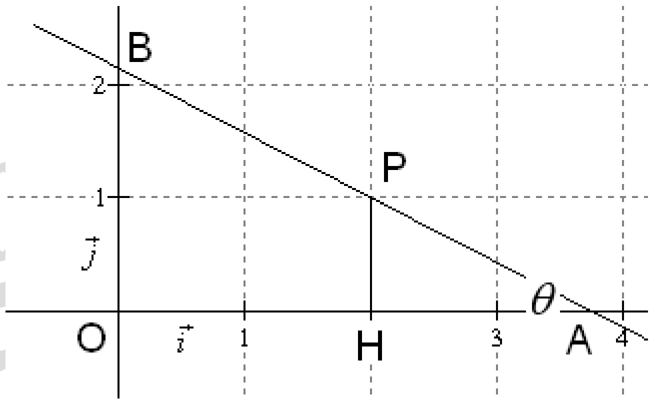
$\left(q_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $q_0 = p_0 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5) Puisque la suite $\left(q_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $q_0 = \frac{3}{4}$, on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{q_n = \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$, et puisque $q_n = p_n - \frac{1}{4}$, on aura $p_n = q_n + \frac{1}{4}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n}$

jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°4



1) Dans le triangle AHP rectangle en H, on a $\tan\left(\widehat{HAP}\right)=\frac{HP}{AH}$

Puisque H est le projeté de P sur $\left(O;\vec{i}\right)$, les coordonnées de H sont (2,0) et ainsi HP=1.

On obtient alors $\tan(\theta)=\frac{1}{AH}\Leftrightarrow \boxed{AH=\frac{1}{\tan(\theta)}}$ (puisque $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, on a $\tan(\theta)\neq 0$. Ainsi, $\boxed{OA=OH+HA=2+\frac{1}{\tan\theta}}$

2) Dans le triangle OAB, puisque (HP)//(OB) (deux droites perpendiculaires à une même troisième ont parallèles entre elles), on applique le théorème de Thalès : $\frac{HP}{OB}=\frac{AH}{AO}\Leftrightarrow OB=\frac{HP\times AO}{AH}=\frac{1\times\left(2+\frac{1}{\tan\theta}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}}$. On simplifie l'expression

$\frac{1\times\left(2+\frac{1}{\tan\theta}\right)}{\frac{1}{\tan\theta}}=\tan\theta\times\left(2+\frac{1}{\tan\theta}\right)=2\tan\theta+1$. On a ainsi montré l'égalité $\boxed{OB=1+2\tan\theta}$

L'aire du triangle OAB rectangle en O vaut $\boxed{\frac{OA\times OB}{2}=\frac{\left(2+\frac{1}{\tan\theta}\right)\times(1+2\tan\theta)}{2}}$

3) Si on note $f(x)=\left(2+\frac{1}{x}\right)(1+2x)$ la fonction définie sur $]0;+\infty[$, on développe $f(x)=2+4x+\frac{1}{x}+2=4x+\frac{1}{x}+4$, et on dérive *f* qui est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont : Pour tout x de $]0;+\infty[$, on obtient $f'(x)=4-\frac{1}{x^2}=\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(2+\frac{1}{x}\right)$. Puisque $x\in]0;+\infty[$, $2+\frac{1}{x}>0$, donc $f'(x)$ aura le même signe que $2-\frac{1}{x}$. Or $2-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ et $2-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{1}{x}<2\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ (car $x>0$) (et par conséquent $2-\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{2}$). Ainsi, pour $x\in\left]0;\frac{1}{2}\right[$, $f'(x)<0$ et pour $x\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>0$

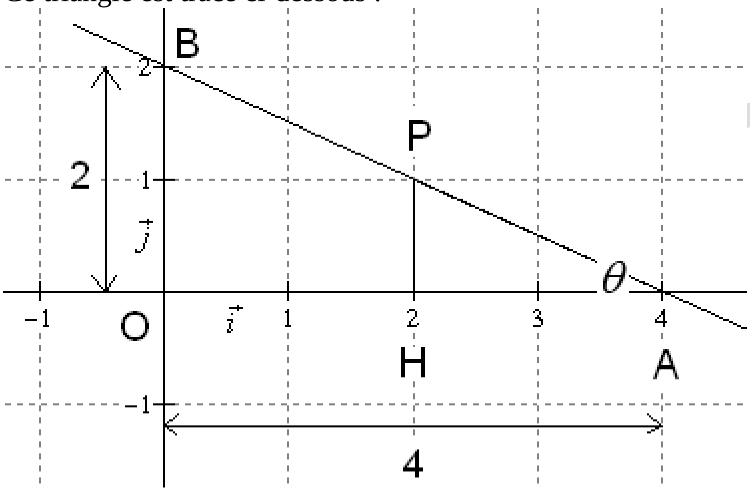
$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est strictement décroissante sur } \left]0;\frac{1}{2}\right] \text{ et strictement croissante sur } \left[\frac{1}{2};+\infty\right[}$

$\boxed{\text{Elle atteint donc un minimum en } \frac{1}{2}}$, lequel minimum vaut $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(2+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\left(1+2\times\frac{1}{2}\right)=4\times 2=8}$

4) La fonction tan étant bijective de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0;+\infty[$, on pose $x=\tan\theta$, dans l'expression $\frac{\left(2+\frac{1}{\tan\theta}\right)\times(1+2\tan\theta)}{2}$, pour obtenir : Aire OAB=$\frac{\left(2+\frac{1}{x}\right)\times(1+2x)}{2}=\frac{f(x)}{2}$, qui admet donc un minimum lorsque $x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\tan\theta=\frac{1}{2}$, lequel minimum vaut $\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{8}{2}=4$. Comme l'unité des axes du repères est de 2 cm, une unité d'aire vaut 4 cm^2, et $\boxed{\text{l'aire minimale du triangle OAB est donc 4x4=16 cm}^2}$

5) Pour $x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan\theta=\frac{1}{2}$, les dimensions du triangle OAB sont $\boxed{OA=2+\frac{1}{\frac{1}{2}}=4}$ et $\boxed{OB=1+2\times\frac{1}{2}=2}$

Ce triangle est tracé ci-dessous :



<u>Fin du corrigé</u>

jgcuaz@hotmail.com