CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS CTA/SD option Scientifique
CONCOURS 2005
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1 (3 points)

Notons $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$. Alors le module de z_1 est $|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$. Pour trouver un argument de z_1, cherchons θ tel que $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}}$

De même, notons $z_2 = 1 - i$. Alors le module de z_2 est $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Pour trouver un argument de z_2, cherchons θ tel que $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On trouve $\theta = -\frac{\pi}{4}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

Le quotient $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ s'écrit donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Alors $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{i\frac{20\times 7\pi}{12}} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10} e^{i\frac{140\pi}{12}}$

Comme $140 = 6\times 24 - 4$, on aura $\frac{140\pi}{12} = \frac{6\times 24\pi}{12} - \frac{4\pi}{12} = 6\times 2\pi - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Ainsi $e^{i\frac{140\pi}{12}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Enfin, $\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^{10} = 2^{10} = 1024$ En conclusion $z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = 1024\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \boxed{= 512 + 512i}$

Exercice n°2 (3 points)

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}\left(3\sqrt{2} - 4; \sqrt{2} - 2\right)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont $\overrightarrow{AC}\left(x_C - x_A; y_C - y_A\right)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AC}\left(2\sqrt{2} - 3; \sqrt{2} - 1\right)$.

On examine le critère de colinéarité des deux vecteurs en calculant les produits en croix :

D'une part $\left(3\sqrt{2} - 4\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = 3\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 = 10 - 7\sqrt{2}$

D'autre part $\left(2\sqrt{2} - 3\right)\left(\sqrt{2} - 2\right) = 2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 6 = 10 - 7\sqrt{2}$

$\boxed{\text{Les produits en croix étant égaux, les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont colinaires, donc les points ,B et C sont alignés}}$.

Exercice n°3 (4 points)

Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Pour montrer que $x^{2005} + \frac{1}{x^{2005}}$ est un nombre entier, démontrons **par récurrence** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est aussi un entier

Notons Q(n) la propriété « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier »

La propriété est vraie pour n=1 par hypothèse

De plus $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + 2\times x\times\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Ainsi $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$, et puisque $x+\dfrac{1}{x}$ est un entier, son carré l'est aussi, et ainsi $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ est entier, comme différence de deux entiers. La propriété est donc vraie pour n=2

Supposons maintenant les propriétés Q(p-1) et Q(p) vraie pour un certain entier $p\in\mathbb{N}$, c'est-à-dire que $x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}}$ et $x^p+\dfrac{1}{x^p}$ sont des entiers, et montrons que la propriété Q(p+1) est vraie, c'est-à-dire que $x^{p+1}+\dfrac{1}{x^{p+1}}$ est entier

On développe $\left(x^p+\dfrac{1}{x^p}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^{p+1}+x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}}+\dfrac{1}{x^{p+1}}$ donc $x^{p+1}+\dfrac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\dfrac{1}{x^p}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}}\right)$

Par hypothèse de récurrence, $x^p+\dfrac{1}{x^p}$ est entier. Puisque $x+\dfrac{1}{x}$ est un entier, le produit $\left(x^p+\dfrac{1}{x^p}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ est entier (le produit de deux entiers est entiers). Enfin, toujours par hypothèse de récurrence, $x^{p-1}+\dfrac{1}{x^{p-1}}$ est entier. Par différence de deux entiers, on conclut que $x^{p+1}+\dfrac{1}{x^{p+1}}$ est entier. On a bien montré que $\left(Q(p-1) \text{ et } Q(p)\right)\Rightarrow Q(p+1)$, ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration pr récurrence

Exercice n°4 (10 points)

Partie I

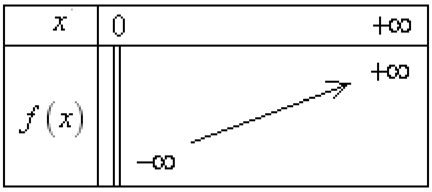
1) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{2x}$. Mais comme $x\in\,]0;+\infty[$, on aura $1+\dfrac{1}{2x}>0\Leftrightarrow f'(x)>0$

$\boxed{f \text{ est donc strictemet croissante sur }]0;+\infty[}$

De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$.

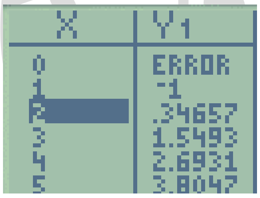
Enfin, pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)=x\left(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\ln x}{x}\right)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on conclut, par différence et produits que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

Le tableau de variations de f est donc :



2) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Comme $0\in\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme l'existence d'une unique solution l à l'équation $f(x)=0$.



Grâce à la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de f sur $]0;+\infty[$

Puisque f(1)<0 et f(2)>0, on peut affirmer que $\boxed{l\in\,]1;2[}$, donc $\boxed{n=1}$

3) Puisque f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$,

pour tout $x\in\,]0;l[$, $f(x)<f(l)$, c'est-à-dire $f(x)<0$, et pour tout $x\in\,]l;+\infty[$, $f(x)>f(l)$, c'est-à-dire $f(x)>0$,

Partie II

1) On utilise la limite de croissance comparée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln x = 0$ pour conclure, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 0 = g(0)}$, donc que $\boxed{g \text{ est continue en } 0}$

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g(x) = x^2\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x\right)$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x = -\infty$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on conclut par produit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}$

2) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont, et pour tout $x>0$, $g'(x) = -\frac{7}{8}\times 2x + 1 - \frac{1}{4}\left(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right)$ où $u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x$ et $v(x)=\ln x \Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x}$.

Ainsi $g'(x) = -\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{4}\left(2x\ln x + x^2\times\frac{1}{x}\right) = -\frac{7}{4}x+1-\frac{x\ln x}{2}-\frac{1}{4}x = -2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$

On calcule par ailleurs $xf\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(\frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}\ln(x)\right) = 1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$

On a bien l'égalité $\boxed{g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)}$

3) On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{7}{8}\left(\frac{1}{l}\right)^2 + \frac{1}{l} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{l}\right)^2\ln\frac{1}{l} = -\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}\ln l$

Or par définition $f(l)=0 \Leftrightarrow l-2+\frac{1}{2}\ln l = 0 \Leftrightarrow \ln l = 2(2-l)$. On remplace donc dans le calcul de $g\left(\frac{1}{l}\right)$:

$g\left(\frac{1}{l}\right) = -\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}\left(2(2-l)\right) = -\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{4-2l}{4l^2} = \frac{-7+8l+2(4-2l)}{8l^2} \boxed{= \frac{1+4l}{8l^2}}$, d'où l'égalité demandée.

Pour tout $x>0$, $g'(x)$ aura le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi :

Si $x\in\left]0;\frac{1}{l}\right[$, on aura $\frac{1}{x}>l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$ et par suite $g'(x)>0$.

Si $x\in\left]\frac{1}{l};+\infty\right[$, on aura $\frac{1}{x}<l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)<0$ et par suite $g'(x)<0$. Enfin $g'\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{l}f(l)=0$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante sur } \left]0;\frac{1}{l}\right[\text{ et strictement décroissante sur } \left]\frac{1}{l};+\infty\right[}$

Son tableau de variations est donc :

x	0		$\frac{1}{l}$		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$	$\searrow$	$-\infty$

4) Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x-1)+g(1)$. Or $g'(1) = 1\times f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) = -1$ et $g(1) = \frac{1}{8}$

Ainsi une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse 1 est $\boxed{y = -(x-1)+\frac{1}{8} = -x+\frac{9}{8}}$

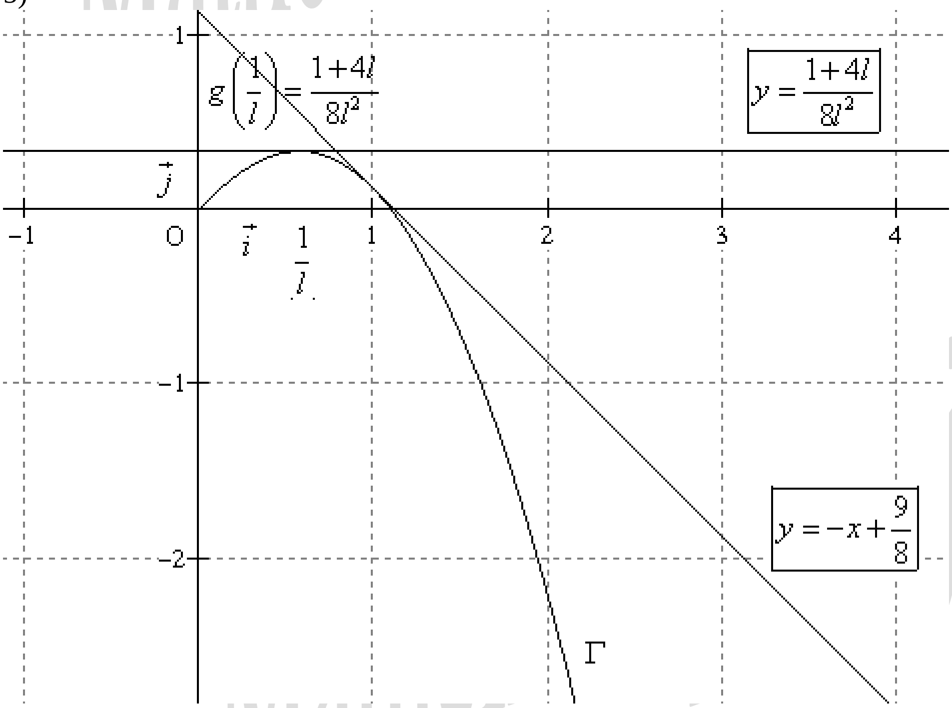
 jgcuaz@hotmail.com

Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse l est $y=g'(l)(x-l)+g(l)$. Or $g'(l)=0$ et $g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$

Ainsi une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de g au point d'abscisse l est $\boxed{y=\frac{1+4l}{8l^2}}$

En reprenant l'écriture $g'(x)=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$, et en utilisant la limite de croissance comparée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$, on conclut par somme que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x)=1}$. Graphiquement, cela signifie que Γ admet en O une demi tangente parallèle à la première bissectrice.

5)



Partie III

1) $I=\int_{\alpha}^{1} x^2\ln x dx=\int_{\alpha}^{1} u'(x)v(x)dx$ où $u'(x)=1\Rightarrow u(x)=x$ et $v(x)=x^2\ln x\Rightarrow v'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$ sont des fonctions continument dérivables sur $]\alpha;1[$, $0<\alpha<1$

La formule d »intégration par parties nous permet alors d'écrire :

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_{\alpha}^{1}-\int_{\alpha}^{1}u(x)v'(x)dx=\left[x^3\ln x\right]_{\alpha}^{1}-\int_{\alpha}^{1}x(2x\ln x+x)dx$$

$$=-\alpha^3\ln\alpha-2\int_{\alpha}^{1}x^2\ln xdx-\int_{\alpha}^{1}x^2dx=-\alpha^3\ln\alpha-2I-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\alpha}^{1}$$

$$=-\alpha^3\ln\alpha-2I-\frac{1^3}{3}+\frac{\alpha^3}{3}=-2I-\alpha^3\ln\alpha+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{1}{3}$$

On en conclut donc que $3I=-\alpha^3\ln\alpha+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{1}{3}$ donc que $\boxed{I=\frac{-\alpha^3\ln\alpha}{3}+\frac{\alpha^3-1}{9}}$

 jgcuaz@hotmail.com

2)

$$I(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} g(x)\,dx=\int_{\alpha}^{1}\left(-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\right)dx$$

$$=\int_{\alpha}^{1}-\frac{7}{8}x^2dx+\int_{\alpha}^{1}xdx-\frac{1}{4}I$$

$$=\left[-\frac{7}{24}x^3\right]_{\alpha}^{1}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{1}-\frac{1}{4}\left(\frac{-\alpha^3\ln\alpha}{3}+\frac{\alpha^3-1}{9}\right)$$

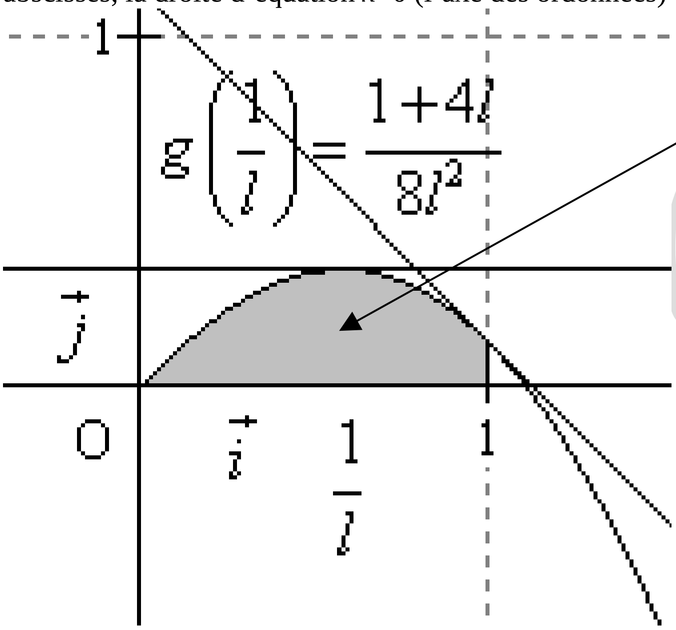
$$=-\frac{7}{24}+\frac{7}{24}\alpha^3+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{4}\left(\frac{-\alpha^3\ln\alpha}{3}+\frac{\alpha^3-1}{9}\right)$$

$$=\frac{\alpha^3\ln\alpha}{12}-\frac{1}{36}\alpha^3+\frac{7}{24}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{36}-\frac{7}{24}+\frac{1}{2}$$

$$\boxed{=\frac{\alpha^3\ln\alpha}{12}+\frac{19}{72}\alpha^3-\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{17}{72}}$$

3) En utilisant la limite de croissance comparée $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\alpha^3\ln\alpha=0$ on conclut que $\boxed{\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)=\frac{17}{72}}$

Puisque $g(x)>0$ sur $]0;+\infty[$, ce résultat mesure l'aire, en unités d'aires, du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses, la droite d'équation x=0 (l'axe des ordonnées) et la droite d'équation x=1



Fin du corrigé

 jgcuaz@hotmail.com