CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS CTA/SD option Scientifique
CONCOURS 2004
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos 2x = 2(\cos x)^2 - 1$, l'équation (E) $4\cos 2x - 6\cos x - 1 = 0$ est équivalente à $4(2\cos^2 x - 1) - 6\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{8\cos^2 x - 6\cos x - 5 = 0}$

Si on pose $X = \cos x$, l'équation devient alors équivalente à $8X^2 - 6X - 5 = 0 \quad (E')$, que l'on résout en calculant son discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4\times 8\times(-5) = 196 = 14^2$. L'équation (E') admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{196}}{2\times 8} = \frac{6-14}{16} = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{196}}{2\times 8} = \frac{6+14}{16} = \frac{5}{4}$$

On « revient » à l'inconnue x :

$X_2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos x = \frac{5}{4}$, équation qui n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1 \le \cos x \le 1$

$$X_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l\in\mathbb{Z} \end{cases}. \text{ Ainsi } \boxed{S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}; -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi, l\in\mathbb{Z} \right\}}$$

Exercice n°2

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, notons $S_n = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$, et montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = n+1-\frac{1}{n+1}$. Notons Q(n) la propriété « $S_n = n+1-\frac{1}{n+1}$ »

Initialisation : Si n=1, alors d'une part $S_1 = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} = \sqrt{2+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$, et d'autre part $1+1-\frac{1}{1+1} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ d'où l'égalité $S_1 = 1+1-\frac{1}{1+1}$, qui est la propriété Q(1).

Hérédité : Supposons la propriété Q(p) vraie pour un entier p quelconque fixé, à savoir $S_p = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}} = p+1-\frac{1}{p+1}$, et montrons que la propriété Q(p+1) est alors vraie, à savoir $S_{p+1} = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}} = p+2-\frac{1}{p+2}$

On calcule :

$$S_{p+1} = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}$$

$$= \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}} = S_p + \sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}$$

et puisque par hypothèse de récurrence, on a $S_p = \sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \dots \sqrt{1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{(p+1)^2}} = p+1-\frac{1}{p+1}$, on se retrouve avec $S_{p+1} = p+1-\frac{1}{p+1} + \sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}$.

Il nous suffit donc démontrer l'égalité :

$$p+1-\frac{1}{p+1}+\sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}=p+2-\frac{1}{p+2}\Leftrightarrow\sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}+1$$

On met le membre de droite sous un même dénominateur :

$$\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}+1=\frac{p+2-(p+1)+(p+1)(p+2)}{(p+1)(p+2)}=\frac{p+2-p-1+p^2+2p+p+2}{(p+1)(p+2)}=\frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p+2)}$$

Dans le memnre de gauche, on effectue une mise au même dénominateur « sous la racine carrée » :

$\sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}=\sqrt{\frac{(p+1)^2(p+2)^2+(p+2)^2+(p+1)^2}{(p+1)^2(p+2)^2}}$. On développe le numérateur :

$$(p^2+2p+1)(p^2+4p+4)+(p^2+4p+4)+(p^2+2p+1)$$
$$=p^4+4p^3+4p^2+2p^3+8p^2+8p+p^2+4p+4+p^2+4p+4+p^2+2p+1$$
$$=p^4+6p^3+15p^2+18p+9$$

On remarque que $p^4+6p^3+15p^2+18p+9=(p^2+3p+3)^2$

On conclut donc que $\sqrt{\frac{(p+1)^2(p+2)^2+(p+2)^2+(p+1)^2}{(p+1)^2(p+2)^2}}=\sqrt{\frac{(p^2+3p+3)^2}{(p+1)^2(p+2)^2}}=\frac{p^2+3p+3}{(p+1)(p+2)}$ car tous les membres de cette fraction sont positifs.

On a bien l'égalité $\sqrt{1+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+2)^2}}=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p+2}+1$ qui nous garantit que $S_{p+1}=p+2-\frac{1}{p+2}$, qui est la propriété Q(p+1) , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence

<u>Exercice n°3</u>

1) On calcule :

$$P(i\sqrt{3})=(i\sqrt{3})^4-6(i\sqrt{3})^3+24(i\sqrt{3})^2-18(i\sqrt{3})+63=(\sqrt{3})^4i^4-6(\sqrt{3})^3i^3+24(\sqrt{3})^2i^2-18i\sqrt{3}+63$$
$$=\left((\sqrt{3})^2\right)^2\Big(\underbrace{i^2}_{-1}\Big)^2-6(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{3})\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24(\sqrt{3})^2\underbrace{i^2}_{-1}-18i\sqrt{3}+63$$
$$=9+18\sqrt{3}i-72-18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

et de même

$$P(-i\sqrt{3})=(-i\sqrt{3})^4-6(-i\sqrt{3})^3+24(-i\sqrt{3})^2-18(-i\sqrt{3})+63=(-\sqrt{3})^4i^4-6(-\sqrt{3})^3i^3+24(-\sqrt{3})^2i^2+18i\sqrt{3}+63$$
$$=\left((-\sqrt{3})^2\right)^2\Big(\underbrace{i^2}_{-1}\Big)^2-6(-\sqrt{3})^2\times(-\sqrt{3})\underbrace{i^2}_{-1}\times i+24(-\sqrt{3})^2\underbrace{i^2}_{-1}+18i\sqrt{3}+63$$
$$=9-18\sqrt{3}i-72+18i\sqrt{3}+63=-63+63\boxed{=0}$$

Les complexes $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ sont donc racines sur polynôme P.

Ainsi, il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels tels que :

$$P(z)=(z-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})Q(z)\Leftrightarrow P(z)=\left(z^2-(i\sqrt{3})^2\right)Q(z)\Leftrightarrow P($$

Pour trouver Q, on effectue une division entre polynômes : Pour tout z différent de $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$, on a $Q(z)=\frac{P(z)}{z^2+3}$. On effectue la division : →

$$\begin{array}{l|l}
z^4-6z^3+24z^2-18z+63 & z^2+3 \\
\hline
z^4 \qquad +3z^2 & z^2-6z+21 \\
\hline
\quad -6z^3+21z^2-18z+63 & \\
\quad -6z^3 \qquad -18z & \\
\hline
\qquad 21z^2 \qquad +63 & \\
\qquad 21z^2 \qquad +63 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Ainsi $\boxed{Q(z)=z^2-6z+21}$

jgcuaz@hotmail.com

2) Puisque $P(z)=(z^2+3)(z^2-6z+21)$, la règle du produit nul affirme que $P(z)=0 \Leftrightarrow z^2+3=0$. Ou $z^2-6z+21=0$ Résolvons l'équation $z^2-6z+21=0 \Leftrightarrow Q(z)=0$ en calculant le discriminant du polynôme Q : $\Delta=(-6)^2-4\times1\times21=36-84=-48$. Le polynôme Q admet donc deux racines complexes conjuquées $z_1=\frac{-(-6)+i\sqrt{48}}{2\times1}=\frac{6+4i\sqrt{3}}{2}\boxed{=3+2i\sqrt{3}}$ et $z_2=\overline{z_1}\boxed{=3-2i\sqrt{3}}$. Ainsi $\boxed{S=\left\{i\sqrt{3};-i\sqrt{3};3+2i\sqrt{3};3-2i\sqrt{3}\right\}}$

3) cf fin d'exercice

4) Si E est le symétrique de D par rapport à O, alors $z_E=-z_D=-(3-2i\sqrt{3})=-3+2i\sqrt{3}$

On calcule alors $\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{3+3i\sqrt{3}}{-3+3i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}$

On multiplie numérateur et cénominateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}=\frac{-1-i\sqrt{3}-i\sqrt{3}+3}{(-1)^2-(i\sqrt{3})^2}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{1+3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

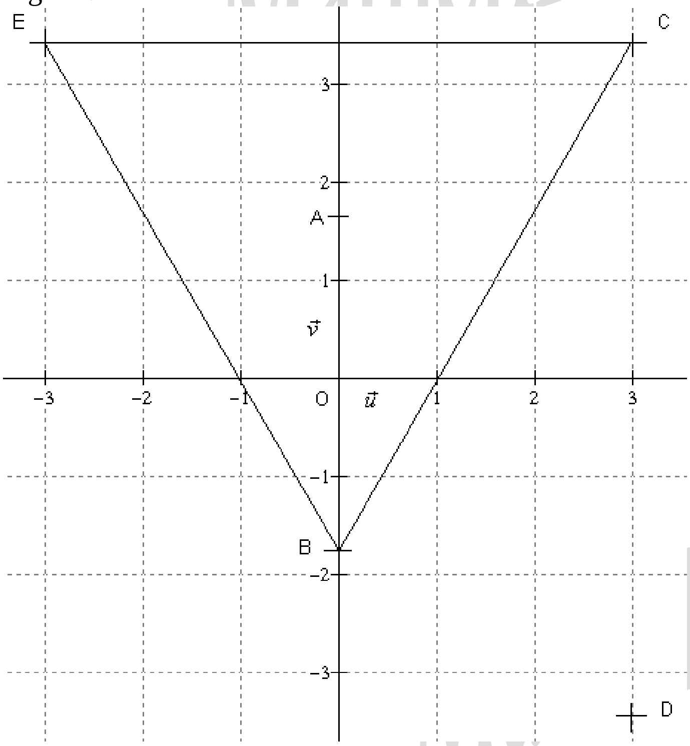
On détermine module er argument de $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

Le module de ce complexe vaut $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$. On cherche ensuite θ tel que $\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. On trouve $\theta=-\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Ainsi $\boxed{\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}}$

De l'égalité précédente, on déduit que $\left|\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right|=\left|e^{-i\frac{\pi}{3}}\right| \Leftrightarrow \frac{BC}{BE}=1 \Leftrightarrow BC=BE$, donc le triangle BEC est isocèle en B.

De plus $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{3}[2\pi]$, donc $\boxed{\text{le triangle BEC est finalement équilatéral}}$

Figure :



 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°4

Partie I

1) g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$g'(x)=2x-2\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2\left(x^2-1\right)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Puisque $x>0$, le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont –1 et 1

Ainsi, pour $x\in]0;1[$, $g'(x)<0$ donc g est strictement décroissante sur]0 ;1[, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, $g'(x)>0$ donc g est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

2) Sur $]0;+\infty[$, g atteint donc son minimum lorsque x = 1, et comme $g(1)=1^2-2\times\underbrace{\ln 1}_{0}=1$, on peut affirmer que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g(x)>0$

Partie II

1) Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$. La droite d'équation x = 0 (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C)

2) On transforme l'écriture de $f(x)$: Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

En utilisant la limite de croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, on déduit par somme que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$. De plus, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on aura donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=0}$, ce qui prouve que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$. Pour connaître la position relative de (C) et (Δ), on étudie le signe de la différence $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1+\ln x}{x}$. Or

$$f(x)-\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow 1+\ln x=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}=e^{-1} \text{ et } f(x)-\frac{x}{2}>0\Leftrightarrow 1+\ln x>0\Leftrightarrow \ln x>-1\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}=e^{-1}$$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse $\frac{1}{e}=e^{-1}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}$

De plus, sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, (C) est en dessous de (Δ), et sur $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$, (C) est au dessus de (Δ).

3) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{2x^2}\left(x^2-2\ln x\right)=\frac{1}{2x^2}g(x)$$

Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2}>0$ et $g'(x)>0$ (question 2 de la partie 1), on conclut que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$, donc que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

Le tableau de variations de f est donc :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$

Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse a est égal à $f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si $f'(a)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2}=0 \Leftrightarrow \ln a=0 \Leftrightarrow a=1$. C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1)=\frac{3}{2}$ que la tangente (T) sera parallèle à (Δ)

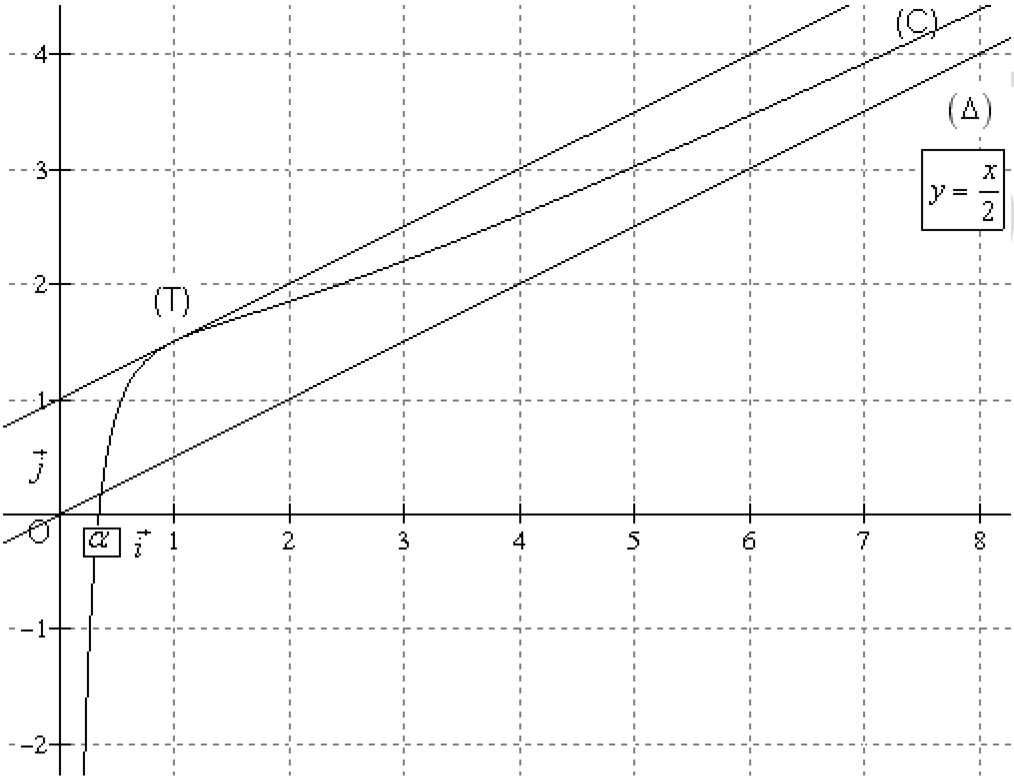
5) Sur $]0;+\infty[$, f est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Enfin, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, on a $0\in\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme donc l'existence d'une valeur α telle que $f(\alpha)=0$

Par définition, $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}+\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=0 \Leftrightarrow \boxed{\ln\alpha=-\frac{\alpha^2}{2}-1}$

Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est égal à :

$f'(\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}-\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}-1\right)}{\alpha^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\frac{1}{\alpha^2}>1$. Ce coefficient est donc supérieur à 1

6) Représentation graphique de (C), (Δ) et (T) :



Partie III

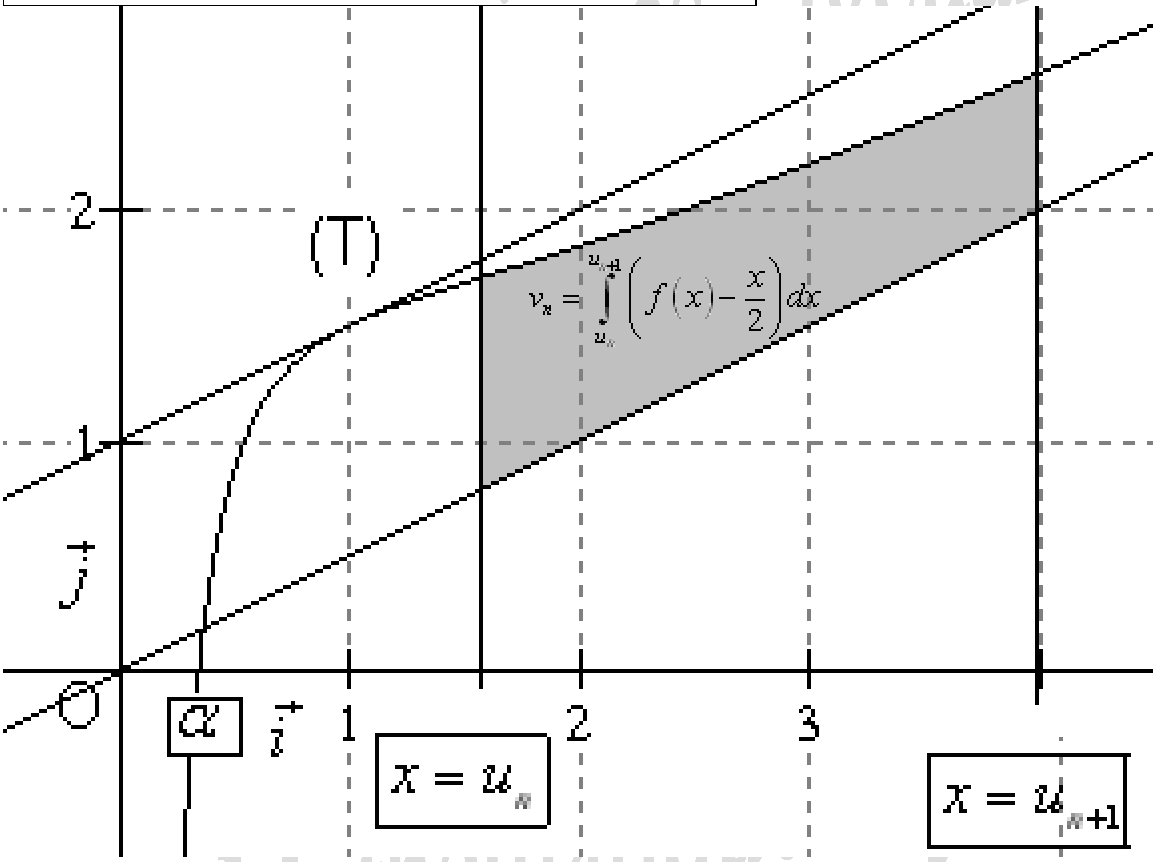
1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=e^{\frac{n-2}{2}}>0$. On calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{\frac{n+1-2}{2}}}{e^{\frac{n-2}{2}}}=\frac{e^{\frac{n-1}{2}}}{e^{\frac{n-2}{2}}}=\frac{\frac{e^{n-1}}{e^2}}{\frac{e^{n-2}}{e^2}}=\frac{e^{n-1}}{e^2}\times\frac{e^2}{e^{n-2}}=e^{n-1-(n-2)}=e$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_n \text{ est donc géométrique de raison } e \text{ et premier terme } u_0=e^{-1}=\frac{1}{e}}$

Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et puisque $\frac{u_{n+1}}{u_n}=e>1 \Leftrightarrow u_{n+1}>u_n$, la suite $(u_n)_n$ est strictement croissante

 jgcuaz@hotmail.com

2) Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = e^{\frac{n-2}{2}} = e^{\frac{n}{2}-1} > \frac{1}{e}$, et puisque pour tout $x>\frac{1}{e}$, (C) est au dessus de (Δ), le résultat du calcul de l'intégrale $\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$ désignera, en unités d'aires, l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ), et les droites d'équations $x=u_n$ et $x=u_{n+1}$



Puisque pour tout $x>0$, $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}+v'(x)v(x)$ où $v(x)=\ln x$, on aura

$$v_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx = \int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\right)dx = \left[\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{u_n}^{u_{n+1}}$$

$$= \ln u_{n+1}+\frac{(\ln u_{n+1})^2}{2}-\left(\ln u_n+\frac{(\ln u_n)^2}{2}\right) = \ln e^{\frac{n-1}{2}}+\frac{\left(\ln e^{\frac{n-1}{2}}\right)^2}{2}-\left(\ln e^{\frac{n-2}{2}}+\frac{\left(\ln e^{\frac{n-2}{2}}\right)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{2}\right)^2-\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 = \frac{2n-2+n^2-2n+1-2n+4-n^2+4n-4}{4}$$

$$\boxed{=\frac{2n-1}{4}}$$

On calcule la différence de deux termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$v_{n+1}-v_n=\frac{2(n+1)-1}{4}-\frac{2n-1}{4}=\frac{2n+2-1-2n+1}{4}=\frac{1}{2}$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison $\frac{1}{2}$

Fin du corrigé