CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS CTA/SD Sciences Humaines, option Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2009
EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{-6x+1}=e^{x+3}$. L'équation $e^{-6x+1}=e^{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par bijectivité de la fonction $X\mapsto e^X$, on a :

:Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-6x+1}=e^{x+3}\Leftrightarrow -6x+1=x+3\Leftrightarrow 7x=-2\Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{2}{7}}$

L'ensemble des solutions de l'équation $e^{-6x+1}=e^{x+3}$ est donc $\boxed{S_1=\left\{-\frac{2}{7}\right\}}$.

2) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6x+1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x+3}$. L'équation $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6x+1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par bijectivité de la fonction $X\mapsto\left(\frac{5}{2}\right)^X$, on a : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6x+1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x+3}\Leftrightarrow -6x+1=x+3\Leftrightarrow 7x=-2\Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{2}{7}}$

L'ensemble des solutions de l'équation $\left(\frac{5}{2}\right)^{-6x+1}=\left(\frac{5}{2}\right)^{x+3}$ est donc $\boxed{S_2=\left\{-\frac{2}{7}\right\}}$.

3) $3^{-6x+1}=3^{x+3}$. L'équation $3^{-6x+1}=3^{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Par bijectivité de la fonction $X\mapsto 3^X$, on a :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $3^{-6x+1}=3^{x+3}\Leftrightarrow -6x+1=x+3\Leftrightarrow 7x=-2\Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{2}{7}}$

L'ensemble des solutions de l'équation $3^{-6x+1}=3^{x+3}$ est donc $\boxed{S_3=\left\{-\frac{2}{7}\right\}}$.

4) $2^{-6x+1}=5^{x+3}$. L'équation $2^{-6x+1}=5^{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$. On transforme l'écriture de l'équation :
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2^{-6x+1}=5^{x+3}\Leftrightarrow e^{(-6x+1)\ln 2}=e^{(x+3)\ln 5}$. Par bijectivité de la fonction $X\mapsto e^X$, on a :

$$e^{(-6x+1)\ln 2}=e^{(x+3)\ln 5}\Leftrightarrow(-6x+1)\ln 2=(x+3)\ln 5$$
$$\Leftrightarrow -6x\ln 2-x\ln 5=3\ln 5-\ln 2$$
$$\Leftrightarrow x(-6\ln 2-\ln 5)=\ln\frac{5^3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)^6-\ln 5\right)=\ln\frac{5^3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x\left(\ln\frac{1}{5\times 2^6}\right)=\ln\frac{5^3}{2}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\ln 125/2}{\ln 1/320}$$
$$\boxed{\Leftrightarrow x=-\frac{\ln 125/2}{\ln 320}}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $2^{-6x+1}=5^{x+3}$ est donc $\boxed{S_4=\left\{-\frac{\ln 125/2}{\ln 320}\right\}}$.

5) $\left|\frac{-6x+1}{x+3}\right|=6$. L'équation $\left|\frac{-6x+1}{x+3}\right|=6$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles $x+3\neq 0$, donc est définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$.

Pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$, l'équation $\left|\frac{-6x+1}{x+3}\right|=6$ est équivalente aux deux équations $\frac{-6x+1}{x+3}=6$ et $\frac{-6x+1}{x+3}=-6$. Pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$,

$\frac{-6x+1}{x+3}=6 \Leftrightarrow -6x+1=6(x+3) \Leftrightarrow -6x+1=6x+18 \Leftrightarrow 12x=-17 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{17}{12}}$

et $\frac{-6x+1}{x+3}=-6 \Leftrightarrow -6x+1=-6(x+3) \Leftrightarrow -6x+1=-6x-18 \Leftrightarrow 0x=-17$, équation qui n'admet pas de solution.

L'ensemble des solutions de l'équation $\left|\frac{-6x+1}{x+3}\right|=6$ est donc $\boxed{S_5=\left\{-\frac{17}{12}\right\}}$.

6) $Ln\left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=0$. L'équation $Ln\left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=0$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles $x+3\neq 0$ et $\frac{6x-1}{x+3}\neq 0$. Or pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$, $\frac{6x-1}{x+3}=0 \Leftrightarrow 6x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{6}$.

L'équation est donc définie sur $]-\infty;-3[\cup\left]-3;\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$.

Pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup\left]-3;\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$, $Ln\left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=0 \Leftrightarrow \left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=1$, équation équivalente aux deux équations $\frac{6x-1}{x+3}=1$ et $\frac{6x-1}{x+3}=-1$.

Pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup\left]-3;\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$,

$\frac{6x-1}{x+3}=1 \Leftrightarrow 6x-1=x+3 \Leftrightarrow 5x=4 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{4}{5}}$ et $\frac{6x-1}{x+3}=-1 \Leftrightarrow 6x-1=-x-3 \Leftrightarrow 7x=-2 \Leftrightarrow \boxed{x=-\frac{2}{7}}$

L'ensemble des solutions de l'équation $Ln\left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=0$ est donc $\boxed{S_6=\left\{-\frac{2}{7};\frac{4}{5}\right\}}$.

7) $Ln|6x-1|=Ln|x+3|$. L'équation $Ln|6x-1|=Ln|x+3|$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles on a simultanément $6x-1\neq 0$ et $x+3\neq 0$, donc pour tout x distinct de $\frac{1}{6}$ et –3.

L'équation est donc définie sur $]-\infty;-3[\cup\left]-3;\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$. Pour tout $x\in]-\infty;-3[\cup\left]-3;\frac{1}{6}\right[\cup\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$,

$Ln|6x-1|=Ln|x+3| \Leftrightarrow Ln|6x-1|-Ln|x+3|=0 \Leftrightarrow Ln\frac{|6x-1|}{|x+3|}=0 \Leftrightarrow Ln\left|\frac{6x-1}{x+3}\right|=0$, équation qui a déjà été résolue dans la question 6).

L'ensemble des solutions de l'équation $Ln|6x-1|=Ln|x+3|$ est donc $\boxed{S_7=\left\{-\frac{2}{7};\frac{4}{5}\right\}}$.

8) $Ln|6x-1|=Ln(-x-3)$. L'équation $Ln|6x-1|=Ln(-x-3)$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles on a simultanément $6x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{1}{6}$ et $-x-3>0 \Leftrightarrow x<-3 \Leftrightarrow x\in]-\infty;-3[$, donc pour tout $x\in]-\infty;-3[$. Pour tout $x\in]-\infty;-3[$, $6x-1<0$ donc $|6x-1|=-6x+1$.

jgcuaz@hotmail.com

Pour tout $x \in]-\infty;-3[$, l'équation $Ln|6x-1| = Ln(-x-3)$ est donc équivalente à l'équation $Ln(-6x+1) = Ln(-x-3)$, qui est équivalente, par bijectivité de la fonction $X \mapsto \ln X$, à l'équation $-6x+1 = -x-3 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$. Mais puisque $\frac{4}{5} \notin]-\infty;-3[$, cette solution est à rejeter.

L'ensemble des solutions de l'équation $Ln|6x-1| = Ln(-x-3)$ est donc $\boxed{S_8 = \varnothing}$.

9) $Ln(6x-1) = Ln(x+3)$. L'équation $Ln(6x-1) = Ln(x+3)$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles on a simultanément $6x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{6} \Leftrightarrow x \in \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$ et $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \Leftrightarrow x \in]-3;+\infty[$, donc pour tout $x \in \left]\frac{1}{6};+\infty\right[\cap]-3;+\infty[= \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$. L'équation est donc définie sur $\left]\frac{1}{6};+\infty\right[$.

Pour tout $x \in \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$, l'équation $Ln(6x-1) = Ln(x+3)$ est équivalente, par bijectivité de la fonction $X \mapsto \ln X$, à l'équation $6x-1 = x+3 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$.

Puisque $\frac{4}{5} \in \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$, L'ensemble des solutions de l'équation $Ln(6x-1) = Ln(x+3)$ est donc $\boxed{S_9 = \left\{\frac{4}{5}\right\}}$.

10) $Ln\left(\frac{6x-1}{x+3}\right) = 0$. L'équation $Ln\left(\frac{6x-1}{x+3}\right) = 0$ est définie pour toutes les valeurs pour lesquelles $x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$ et $\frac{6x-1}{x+3} > 0$

On dresse le tableau de signes de l'expression $\frac{6x-1}{x+3}$:

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$6x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{6x-1}{x+3}$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

L'équation $Ln\left(\frac{6x-1}{x+3}\right) = 0$ est donc définie sur $]-\infty;-3[\cup \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$.

Pour tout $x \in]-\infty;-3[\cup \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$, $Ln\left(\frac{6x-1}{x+3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{6x-1}{x+3} = 1 \Leftrightarrow 6x-1 = x+3 \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}$.

Puisque $\frac{4}{5} \in]-\infty;-3[\cup \left]\frac{1}{6};+\infty\right[$, L'ensemble des solutions de l'équation $Ln\left(\frac{6x-1}{x+3}\right) = 0$ est donc $\boxed{S_{10} = \left\{\frac{4}{5}\right\}}$.

<u>Exercice n°2</u>

On considère deux urnes : l'urne A contient 5 billes rouges et 3 billes noires ; l'urne B contient 1 bille rouge et 2 billes noires. Un joueur jette un dé équilibré. S'il obtient un 3 ou un 6, il tire une bille de l'urne B et il la met dans l'urne A, puis il tire une bille de l'urne A. Sinon il tire une bille de l'urne A et il la met dans l'urne B, puis il tire une bille de l'urne B.

On considère les événements suivants :

R_1 : « La bille obtenue au premier tirage est rouge » , R_2 : « La bille obtenue au deuxième tirage est rouge ».

A : « Le premier tirage s'effectue dans l'urne A» , B : « Le premier tirage s'effectue dans l'urne B».

jgcuaz@hotmail.com

1) *Calculer* $p(A)$ *et* $p(B)$.

Notons Ω l'univers associé au jet du dé. On a $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ donc $Card(\Omega) = 6$.
Puisque le dé est équilibré, nous sommes dans une situtation d'équiprobabilité.
Le tirage s'effectue dans l'urne A si et seulement si on obtient 1,2,4 ou 5. Ainsi $A = \{1;2;4;5\}$ et par application de la formule d'équiprobabilité, $\boxed{p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}}$.

Puisque $B = \overline{A}$, on a $\boxed{p(B) = 1 - p(A) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$

2) *Calculer* $p(R_1/A)$ *et* $p(R_1/B)$. *En déduire* $p(R_1)$.

$p(R_1/A)$ est la probabilité que la bille obtenue au premier tirage soit rouge sachant que l'on tire d'abord dans l'urne *A*. Puisque l'urne *A* contient 5 billes rouges et 3 billes noires, on aura $\boxed{p(R_1/A) = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8}}$

$p(R_1/B)$ est la probabilité que la bille obtenue au premier tirage soit rouge sachant que l'on tire d'abord dans l'urne *B*. Puisque l'urne *B* contient 1 bille rouge et 2 billes noires, on aura $\boxed{p(R_1/B) = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}}$

Puisque le système $(A \cap R_1 ; B \cap R_1)$ constitue une partition de l'événement R_1, la formule des probabilités totales nous permet de calculer :

$$p(R_1) = p(A \cap R_1) + p(B \cap R_1) = p(A) \times p(R_1/A) + p(B) \times p(R_1/B)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{12} + \frac{1}{9} = \frac{15}{36} + \frac{4}{36} \boxed{= \frac{19}{36}}$$

3) *Calculer* $p(R_2/A \cap R_1)$ *et* $p(R_2/B \cap R_1)$.

$p(R_2/A \cap R_1)$ est la probabilité que la bille obtenue au deuxième tirage soit rouge sachant que l'on a tiré d'abord dans l'urne *A* et qu'on y a tiré une bille rouge.
Si on a d'abord tiré dans l'urne *A* et qu'on y a tiré une bille rouge, étant donné que l'on met cette bille dans l'urne *B*, cette dernière contiendra désormais 2 billes rouges et 2 billes noires. La probabilité de tirer alors une bille rouge au deuxième tirage sera égale à $\boxed{p(R_2/A \cap R_1) = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}}$.

$p(R_2/B \cap R_1)$ est la probabilité que la bille obtenue au deuxième tirage soit rouge sachant que l'on a tiré d'abord dans l'urne *B* et qu'on y a tiré une bille rouge.
Si on a d'abord tiré dans l'urne *B* et qu'on y a tiré une bille rouge, étant donné que l'on met cette bille dans l'urne *A*, cette dernière contiendra désormais 6 billes rouges et 3 billes noires. La probabilité de tirer alors une bille rouge au deuxième tirage sera égale à $\boxed{p(R_2/B \cap R_1) = \frac{6}{6+3} = \frac{2}{3}}$

4) *Calculer la probabilité que les deux billes tirées soient rouges.*

On cherche à déterminer $p(R_1 \cap R_2)$. Puisque le système $(A \cap R_1 \cap R_2 ; B \cap R_1 \cap R_2)$ constitue une partition de l'événement $R_1 \cap R_2$, la formule des probabilités totales nous permet de calculer :

$$p(R_1 \cap R_2) = p(A \cap R_1 \cap R_2) + p(B \cap R_1 \cap R_2)$$

$$= p((A \cap R_1) \cap R_2) + p((B \cap R_1) \cap R_2)$$

$$= p(A \cap R_1) \times p(R_2/A \cap R_1) + p(B \cap R_1) \times p(R_2/B \cap R_1)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{24} + \frac{2}{27} = \frac{45}{216} + \frac{16}{216} \boxed{= \frac{61}{216}}$$

 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°3

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1$, *pour tout* $x\in\left]0;+\infty\right[$.

On note (C) la courbe représentative de la fonction f dans u nrepère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Etudier les limites de *f* en 0 et $+\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}Ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0^+$ donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{Ln(x)}{x}=-\infty$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\frac{1}{2x}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}-\frac{3}{2}x+1=1$, on en déduit par somme que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=-\infty}$

Une limite célèbre du cours affirme que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{2x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{3}{2}x+1=-\infty$, on déduit par somme que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty}$

2) Démontrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$, pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$ où $g(x)=-3x^2+3-2Ln(x)$.

La fonction *f* est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme et quotient à dénominateur non nul de fonctions qui le sont, et puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}+w(x)$ avec $u(x)=Ln(x)\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x\Rightarrow v'(x)=1$ et $w(x)=-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1\Rightarrow w'(x)=\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$, on aura : Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$,

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}+w'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-Lnx\times1}{x^2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{1-Lnx}{x^2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{2}=\frac{2(1-Lnx)}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}-\frac{3x^2}{2x^2}=\frac{-3x^2+3-2Lnx}{2x^2}\boxed{=\frac{g(x)}{2x^2}}$$

avec $\boxed{g(x)=-3x^2+3-2Ln(x)}$

3) Etudier le sens de variation de *g* sur $\left]0;+\infty\right[$ et calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\left]0;+\infty\right[$.

La fonction *g* est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g'(x)=-6x-\frac{2}{x}$. Puisque $x\in\left]0;+\infty\right[$, $-6x<0$ et $-\frac{2}{x}<0$, donc $g'(x)<0$.

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement décroissante sur } \left]0;+\infty\right[.}$

On calcule $g(1)=-3\times1^2+3-2Ln(1)=-3+3-2\times0=\boxed{0}$

On en déduit que : $\boxed{\text{Pour tout } x\in\left]0;1\right[,\ g(x)>0\ ;\ g(1)=0\ ;\ \text{pour tout } x\in\left]1;+\infty\right[,\ g(x)<0}$

4) Etudier le sens de variation de *f*. Déterminer le tableau de variation de *f*.

Puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{2x^2}$ et puisque $x^2>0$, le signe de $f'(x)$ sera le même que celuide $g(x)$. D'après la question précédente, on aura donc : Pour tout $x\in\left]0;1\right[$, $f'(x)>0$; $f'(1)=0$; pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, $f'(x)<0$. On en déduit que :

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } \left]0;1\right] \text{ et strictement décroissante sur } \left[1;+\infty\right[}$

jgcuaz@hotmail.com

5) Démontrer que la courbe (C) admet une asymptote oblique (D) d'équation $y=-\frac{3}{2}x+1$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)=\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}=0$ (cf question 1) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$, on en déduit par somme que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}=0$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)=0}$. Ceci prouve que **la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique (D) d'équation $y=-\frac{3}{2}x+1$.**

6) Résoudre l'équation $f(x)=-\frac{3}{2}x+1$ dans $\left]0;+\infty\right[$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=-\frac{3}{2}x+1\Leftrightarrow\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{3}{2}x+1=-\frac{3}{2}x+1\Leftrightarrow\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}=0\Leftrightarrow\frac{2Ln(x)-1}{2x}=0$

$\Leftrightarrow 2Ln(x)-1=0\Leftrightarrow Ln(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{x=e^{\frac{1}{2}}}$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(x)=-\frac{3}{2}x+1$ est donc $\boxed{S=\left\{e^{\frac{1}{2}}\right\}}$.

7) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de (C) et de (D).

L'abscisse x_A du point d'intersection A de (C) et de (D) est solution sur $\left]0;+\infty\right[$ de l'équation $f(x)=-\frac{3}{2}x+1$.

D'après la question précédente, l'unique solution de cette équation est $x=e^{\frac{1}{2}}$. Ainsi $x_A=e^{\frac{1}{2}}$

L'ordonnée du point A est alors égale à $y_A=-\frac{3}{2}x_A+1=-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}+1$. Le point A est donc $\boxed{A\left(e^{\frac{1}{2}};-\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}}+1\right)}$

8) Déterminer la position relative de (C) et de (D).

Pour étudier la position relative de (C) et de (D), il suffit d'étudier le signe de $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)=\frac{Ln(x)}{x}-\frac{1}{2x}=\frac{2Ln(x)-1}{2x}$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, le signe de $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)$ sera le même que celui de $2Ln(x)-1$.

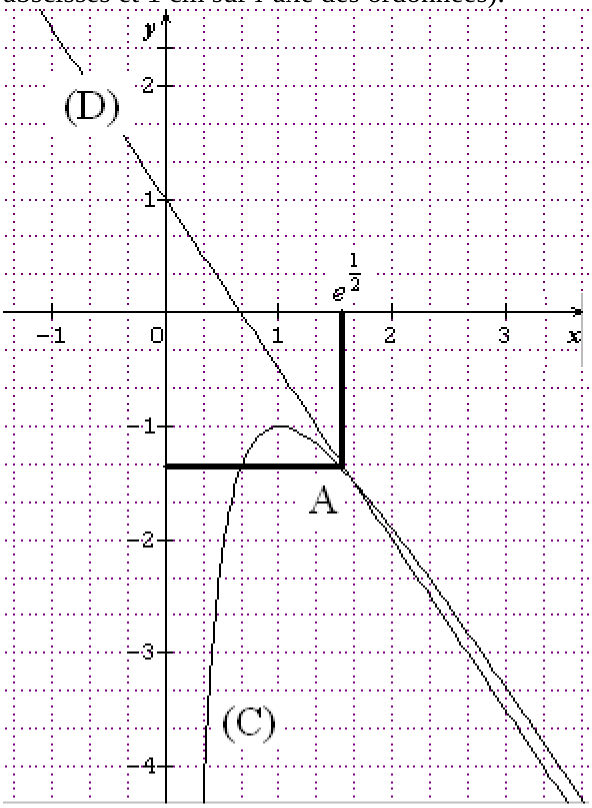
Ainsi, si $x\in\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right[$, $2Ln(x)-1<0$ donc $f(x)-\left(-\frac{3}{2}x+1\right)<0\Leftrightarrow f(x)<-\frac{3}{2}x+1$ et par suite $x\in\left]e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[\Leftrightarrow f(x)>-\frac{3}{2}x+1$

On en conclut que :

La courbe (C) est strictement en dessous de (D) sur l'intervalle $\left]0;e^{\frac{1}{2}}\right[$, et strictement au dessus sur $\left]e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$.

 jgcuaz@hotmail.com

9) Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).



10) Soit *h* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x)=\left(Ln(x)\right)^2$.

- Calculer la dérivée h' de la fonction *h*.
- En déduire une primitive de *f* sur $]0;+\infty[$.

La fonction *h* est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $h(x)=\left(u(x)\right)^2$ avec $u(x)=Ln(x)\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $h'(x)=2u(x)\times u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$.

Une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est donc la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{2}h(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

On en déduit qu'une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction *f* est la fonction *F* définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\left(Ln(x)\right)^2-\frac{1}{2}Ln(x)-\frac{3}{4}x^2+x}$$

<u>fin du corrigé</u>

jgcuaz@hotmail.com