CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS CTA/SD Sciences Humaines, option Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2008
EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

1) L'équation $5^{3x+1}=5^{x+3}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (car les fonctions $x\mapsto a^x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ quelque soit a>0) on utilise la bijectivité de la fonction $x\mapsto 5^x$: Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $5^{3x+1}=5^{x+3}\Leftrightarrow 3x+1=x+3\Leftrightarrow 2x=2\Leftrightarrow x=1$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_1=\{1\}}$

2) L'équation $\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)=0$ est définie pour toutes les valeurs de x telles que $x+3\neq 0$ et $\dfrac{3x+1}{x+3}>0$.

On dresse le tableau de signes de l'expression $A(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$:

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$A(x)=\dfrac{3x+1}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\dfrac{3x+1}{x+3}>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$. L'équation est donc définie sur $\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

On utilise la bijectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)=0\Leftrightarrow\ln\left(\dfrac{3x+1}{x+3}\right)=\ln(1)\Leftrightarrow\dfrac{3x+1}{x+3}=1\Leftrightarrow 3x+1=x+3\Leftrightarrow x=1$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_2=\{1\}}$

3) L'équation $\ln\left|\dfrac{3x+1}{x+3}\right|=0$ est définie pour toutes les valeurs de x telles que $x+3\neq 0$ et $\dfrac{3x+1}{x+3}\neq 0$.

Or $\dfrac{3x+1}{x+3}=0\Leftrightarrow 3x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$. L'équation est donc définie sur $\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-3;-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

On utilise la bijectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in\left]-\infty;-3\right[\cup\left]-3;-\dfrac{1}{3}\right[\cup\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln\left|\dfrac{3x+1}{x+3}\right|=0\Leftrightarrow\left|\dfrac{3x+1}{x+3}\right|=1\Leftrightarrow\dfrac{3x+1}{x+3}=1$ ou $\dfrac{3x+1}{x+3}=-1$

On résout séparément $\dfrac{3x+1}{x+3}=1\Leftrightarrow 3x+1=x+3\Leftrightarrow x=1$ et $\dfrac{3x+1}{x+3}=-1\Leftrightarrow 3x+1=-x-3\Leftrightarrow 4x=-4\Leftrightarrow x=-1$

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_3=\{-1;1\}}$

4) L'équation $\ln(3x+1)=\ln(x+3)$ est définie pour toutes les valeurs de x telles qu'on ait simultanément

$$\begin{cases}3x+1>0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[\\ x\in\left]-3;+\infty\right[\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[\cap\left]-3;+\infty\right[\Leftrightarrow x\in\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[.$$

L'équation est donc définie sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$. On utilise la bijectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln(3x+1)=\ln(x+3)\Leftrightarrow 3x+1=x+3\Leftrightarrow x=1$. Puisque $1\in\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_4=\{1\}}$

5) L'équation $\ln|3x+1|=\ln(x+3)$ est définie pour toutes les valeurs de x telles qu'on ait simultanément $\begin{cases}3x+1\neq 0\\ x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -\frac{1}{3}\\ x\in]-3;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-3;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

L'équation est donc définie sur $\left]-3;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. On utilise la bjectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in \left]-3;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln|3x+1|=\ln(x+3) \Leftrightarrow |3x+1|=x+3$.

On distingue deux cas :

Si $x\in \left]-3;-\frac{1}{3}\right[$, $3x+1<0$, donc $|3x+1|=-(3x+1)=-3x-1$, et l'équation est donc :

$-3x-1=x+3 \Leftrightarrow 4x=-4 \Leftrightarrow x=-1$. Puisque $-1\in \left]-3;-\frac{1}{3}\right[$, cette première équation fournit donc une première solution.

Si $x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $3x+1>0$, donc $|3x+1|=3x-1$, et l'équation est donc :

$3x+1=x+3 \Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1$. Puisque $1\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, cette deuxième équation fournit donc une deuxième solution.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_5=\{-1;1\}}$

6) L'équation $\ln(3x+1)=\ln|x+3|$ est définie pour toutes les valeurs de x telles qu'on ait simultanément $\begin{cases}3x+1>0\\ x+3\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[\\ x\neq -3\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$. L'équation est donc définie sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

On utilise la bjectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln(3x+1)=\ln|x+3| \Leftrightarrow 3x+1=|x+3|$.

Or, pour tout $x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $x+3>0$, donc $|x+3|=x+3$, et l'équation devient donc $3x+1=x+3 \Leftrightarrow x=1$

Puisque $1\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_6=\{1\}}$

7) L'équation $\ln(3x+1)=\ln(x+1)$ est définie pour toutes les valeurs de x telles qu'on ait simultanément $\begin{cases}3x+1>0\\ x+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[\\ x\in]-1;+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[\cap]-1;+\infty[\Leftrightarrow x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

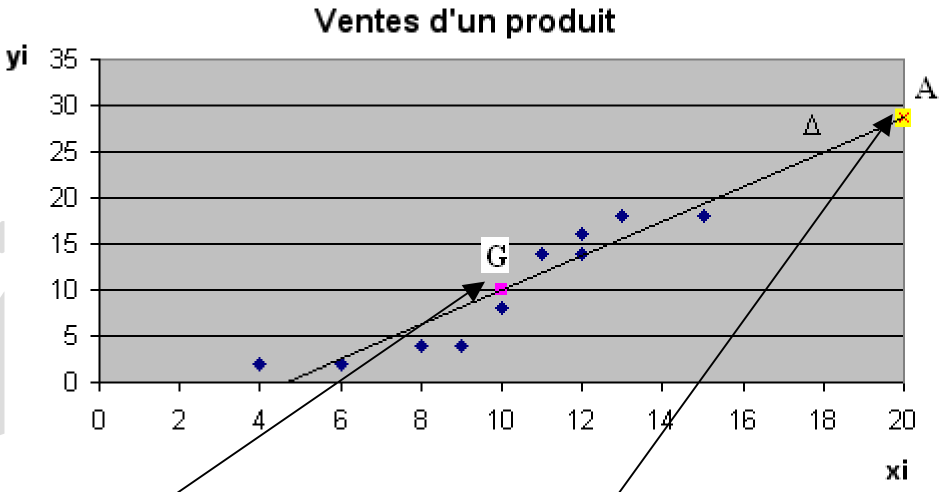
L'équation est donc définie sur $\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$.

On utilise la bjectivité de la fonction ln :

Pour tout $x\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, $\ln(3x+1)=\ln(x+1) \Leftrightarrow 3x+1=x+1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$. Puisque $0\in \left]-\frac{1}{3};+\infty\right[$, on en déduit que l'ensemble des solutions de cette équation est donc $\boxed{S_7=\{0\}}$

Exercice n°2

1) Le nuage des points associés à ces deux séries statistiques est donné ci-contre :



2) Le point moyen du nuage est le point G dont les coordonnées sont :

$$x_G = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{100}{10} = 10$$

et $y_G = \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{100}{10} = 10$.

$\boxed{\text{Le point moyen du nuage est donc } G(10\,;10)}$

3) L'équation de la droite Δ des moindres carrés est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{Cov(x;y)}{V(x)}$ et $G \in \Delta$

Or $Cov(x;y) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10} x_i y_i - \bar{x}\times\bar{y} = \frac{1}{10}\times 1186 - 10\times 10 = 118,6 - 100 = 18,6$.

De plus $V(x) = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10} x_i^2 - \left(\bar{x}\right)^2 = \frac{1}{10}\times 1100 - 10^2 = 110 - 100 = 10$. Ainsi, $m = \frac{18,6}{10} = 1,86$

Comme $G \in \Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ, c'est-à-dire $y_G = mx_G + p \Leftrightarrow 10 = 1,86\times 10 + p$ donc $p = -8,6$, et l'équation de Δ est finalement $\boxed{y = 1,86x - 8,6}$.

Pour la tracer, deux points suffisent. On a déjà le point G. On détermine un autre point, en prenant par exemple $x = 20 \Rightarrow y = 1,86\times 20 - 8,6 = 28,6$, d'où le point A(20 ; 28,6)

La droite Δ semble assez proche de l'ensemble des nuages du point. L'ajustement du nuage par cette droite est donc assez pertinent.

Exercice n°3

Désignons par A_1 et A_2 les deux boules noires et B_1 et B_2 les deux boules blanches.

L'ensemble des tirages peut-être décrit par l'ensemble des mots de quatre lettres fabriqués avec les lettres A_1,A_2,B_1 et B_2 . Par exemple le mot $A_1A_2B_1B_2$ signifie que la première boule tirée a été noire, la deuxième blanche,la troisième noire, et la quatrième blanche.

L'ensemble de tous les tirages possibles est donc :

$A_1A_2B_1B_2$	$A_1A_2B_2B_1$	$A_1B_1A_2B_2$	$A_1B_1B_2A_2$	$A_1B_2B_1A_2$	$A_1B_2A_2B_1$
$A_2A_1B_1B_2$	$A_2A_1B_2B_1$	$A_2B_1A_1B_2$	$A_2B_1B_2A_1$	$A_2B_2B_1A_1$	$A_2B_2A_1B_1$
$B_1A_2A_1B_2$	$B_1A_2B_2A_1$	$B_1A_1A_2B_2$	$B_1A_1B_2A_2$	$B_1B_2A_1A_2$	$B_1B_2A_2A_1$
$B_2A_2B_1A_1$	$B_2A_2A_1B_1$	$B_2B_1A_2A_1$	$B_2B_1A_1A_2$	$B_2A_1B_1A_2$	$B_2A_1A_2B_1$

1) a) « La première boule tirée est noire » est l'événement N_1.

Pour déterminer sa probabilité, ou on fait appel au bon sens (deux boules noires sur un total de quatre boules) ou on liste les tirages favorables à cette situation. Ils sont au nombre de 12 :

$A_1A_2B_1B_2$	$A_1A_2B_2B_1$	$A_1B_1A_2B_2$	$A_1B_1B_2A_2$	$A_1B_2B_1A_2$	$A_1B_2A_2B_1$
$A_2A_1B_1B_2$	$A_2A_1B_2B_1$	$A_2B_1A_1B_2$	$A_2B_1B_2A_1$	$A_2B_2B_1A_1$	$A_2B_2A_1B_1$

Puisque nous sommes en situation d'équiprobabilité, nous pouvons donc affirmer que $\boxed{p\left(N_1\right) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}}$

b) « Les deux premières boules tirées sont noires» est l'événement $N_1 \cap N_2$.

On liste les tirages favorables à cette situation. Ils sont au nombre de 4 :

$A_1A_2B_1B_2$	$A_1A_2B_2B_1$
$A_2A_1B_1B_2$	$A_2A_1B_2B_1$

Puisque nous sommes en situation d'équiprobabilité, nous pouvons donc affirmer que $\boxed{p\left(N_1 \cap N_2\right) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}}$

 jgcuaz@hotmail.com

c) « La deuxième boule tirée est noire» est l'événement N_2.

On liste les tirages favorables à cette situation. Ils sont au nombre de 12 :

$A_1A_2B_1B_2$	$A_1A_2B_2B_1$				
$A_2A_1B_1B_2$	$A_2A_1B_2B_1$				
$B_1A_2A_1B_2$	$B_1A_2B_2A_1$	$B_1A_1A_2B_2$	$B_1A_1B_2A_2$		
$B_2A_2B_1A_1$	$B_2A_2A_1B_1$			$B_2A_1B_1A_2$	$B_2A_1A_2B_1$

Puisque nous sommes en situation d'équiprobabilité, nous pouvons donc affirmer que $\boxed{p(N_2)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}}$

<u>Remarque :</u>
Il y a autant de mots de quatre lettres dont la deuxième lettre est un A que de mots de quatre lettres dont la première lettre est un A.

Ainsi $\boxed{p(N_2)=p(N_1)=\frac{1}{2}}$

d) « Les deux premières boules tirées sont de la même couleur» est l'événement $(N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})$.

Puisque les événements $(N_1\cap N_2)$ et $(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})$ sont disjoints, on aura :

$$p\left[(N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})\right]=p(N_1\cap N_2)+p(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})$$

$p(N_1\cap N_2)$ a déjà été calculé

Le calcul de $p(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})$ est RIGOUREUSEMENT IDENTIQUE à celui de $p(N_1\cap N_2)$ (remplacer le mot « noire » par le mot « blanche », car les boules noires et blanches jouent des rôles parfaitement symétriques.

Ainsi $p(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})=\frac{1}{6}$ et finalement $\boxed{p\left[(N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})\right]=p(N_1\cap N_2)+p(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}}$

e) « Les deux premières boules tirées sont de couleurs différentes» est l'événement $\overline{(N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})}$.

Ainsi, $\boxed{p\left[\overline{(N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})}\right]=1-p\left((N_1\cap N_2)\cup(\overline{N_1}\cap\overline{N_2})\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}$

2) On cherche à calculer $p_{N_1}(N_2)$. On applique la formule des probabilités conditionnelles :

$$p_{N_1}(N_2)=\frac{p(N_1\cap N_2)}{p(N_1)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}\boxed{=\frac{1}{3}}$$

3) a) «*La première boule tirée est noire* » est l'événement N_1. Or nous savons que $p(N_1)=\frac{1}{2}$

«*La deuxième boule tirée est blanche* » est l'événement $\overline{N_2}$. On calcule : $p(\overline{N_2})=1-p(N_2)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

Les deux événements seront indépendants si et seulement si $p(N_1\cap\overline{N_2})=p(N_1)\,p(\overline{N_2})$.

L'ensemble des tirages favorables à la réalisation de l'événement $N_1\cap\overline{N_2}$ est

$A_1B_1A_2B_2$	$A_1B_1B_2A_2$	$A_1B_2B_1A_2$	$A_1B_2A_2B_1$
$A_2B_1A_1B_2$	$A_2B_1B_2A_1$	$A_2B_2B_1A_1$	$A_2B_2A_1B_1$

Puisque nous sommes en situation d'équiprobabilité, nous pouvons donc affirmer que $p(N_1\cap\overline{N_2})=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$.

Or $p(N_1)\,p(\overline{N_2})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. L'égalité $p(N_1\cap\overline{N_2})=p(N_1)\,p(\overline{N_2})$ n'étant pas satisfaite, on peut affirmer que ces deux événements **NE SONT PAS INDEPENDANTS**

b) « Les deux premières boules tirées sont de la même couleur» est l'événement $E_1 = \left(N_1 \cap N_2\right) \cup \left(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}\right)$.

Or nous savons que $p\left(E_1\right) = p\left[\left(N_1 \cap N_2\right) \cup \left(\overline{N_1} \cap \overline{N_2}\right)\right] = \dfrac{1}{3}$

«*La deuxième boule tirée est noire* » est l'événement $E_2 = N_2$. Or nous savons que $p\left(E_2\right) = p\left(N_2\right) = \dfrac{1}{2}$

Les deux événements seront indépendants si et seulement si $p\left(E_1 \cap E_2\right) = p\left(E_1\right) p\left(E_2\right)$.

L'événement $E_1 \cap E_2$ est l'événement « les deux premières boules tirées sont noires ».

Ainsi $p\left(E_1 \cap E_2\right) = p\left(N_1 \cap N_2\right) = \dfrac{1}{6}$ d'après la question **1) b)**

Puisque $p\left(E_1\right) p\left(E_2\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6} = p\left(E_1 \cap E_2\right)$, l'égalité $p\left(E_1 \cap E_2\right) = p\left(E_1\right) p\left(E_2\right)$ est vérifiée

On peut affirmer que ces deux événements **SONT INDEPENDANTS**.

<u>Exercice n°4</u>

1)

a) $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont (fonction affine $x \mapsto x+1$ et fonction exponentielle $x \mapsto e^x$)

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(-x\right) = \left(-x+1\right)e^{-x} \neq f\left(x\right)$ donc *f* n'est pas paire.

De plus $-f\left(x\right) = -\left(x+1\right)e^x$, donc $f\left(-x\right) \neq -f\left(x\right)$ donc *f* n'est pas impaire.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc ni paire ni impaire.}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x+1\right)e^x = +\infty$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(x\right) = +\infty}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x+1 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Nous sommes donc en présence d'une forme indéterminée.

On transforme l'écriture de *f* : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = xe^x + e^x$.

Or, par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$. De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. Par somme $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f\left(x\right) = 0}$

b) La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont (fonction affine $x \mapsto x+1$ et fonction exponentielle $x \mapsto e^x$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$, puisque $f\left(x\right) = u\left(x\right)v\left(x\right)$ avec $u\left(x\right) = x+1 \Rightarrow u'\left(x\right) = 1$ et $v\left(x\right) = e^x \Rightarrow v'\left(x\right) = e^x$, on aura : $f'\left(x\right) = u'\left(x\right)v\left(x\right) + u\left(x\right)v'\left(x\right) = 1 \times e^x + \left(x+1\right)e^x \boxed{= \left(x+2\right)e^x}$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, la dérivée $f'\left(x\right)$ aura le même signe que *x*+2.

Ainsi, pour $x \in \left]-\infty;-2\right[$, *x*+2<0 donc $f'\left(x\right) < 0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur } \left]-\infty;-2\right]}$

Pour $x \in \left]-2;+\infty\right[$, *x*+2>0 donc $f'\left(x\right) > 0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \left[-2;+\infty\right[}$

Elle atteint donc son minimum lorsque *x* = -2, lequel minimum vaut $f\left(-2\right) = \left(-2+1\right)e^{-2} = -e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2}$

Le tableau de variation de *f* est donc :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{e^2}$	↗	$+\infty$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on calcule $f\left(x\right) - f'\left(x\right) = \left(x+1\right)e^x + \left(x+2\right)e^x = \left(x+1-\left(x+2\right)\right)e^x = -e^x$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(x\right) = f'\left(x\right) - e^x$. Si on note F une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$, alors en intégrant dans chaque membre de l'égalité, on aura : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F\left(x\right) = f\left(x\right) - e^x$.

Une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est donc : $F\left(x\right) = f\left(x\right) - e^x = \left(x+1\right)e^x - e^x = \left(x+1-1\right)e^x \boxed{= xe^x}$.

jgcuaz@hotmail.com

On calcule $I=\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = F(0)-F(-1) = 0e^{0}-\left(-e^{-1}\right)=e^{-1}\boxed{=\frac{1}{e}}$

Pour tout $x\in[-1;0]$, $x+1\geq 0$ et $e^{x}>0$ donc $f(x)\geq 0$.

I représente donc l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe *C* représentative de *f* et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

2)

a) La fonction *g* est définie sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont (fonction affine $x\mapsto x+1$ et fonction exponentielle $x\mapsto e^{-x}$)

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=(-x+1)e^{-(-x)}=(-x+1)e^{x}\neq g(x)$ donc *g* n'est pas paire.

De plus $-g(x)=-(x+1)e^{-x}$, donc $g(-x)\neq -g(x)$ donc *g* n'est pas impaire.

La fonction *g* est donc ni paire ni impaire.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ et en posant $u = -x$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$. Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$ et en posant $u = -x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$. Nous sommes donc en présence d'une forme indéterminée. On transforme l'écriture de *g* : Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=xe^{-x}+e^{-x}$.

Or, par croissance comparée, en posant $u = -x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} -\left(-xe^{-x}\right)=\lim\limits_{u\to-\infty} -ue^{u}=0$.

De plus, en posant $u = -x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$.Par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0}$

b) La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont (fonction affine $x\mapsto x+1$ et fonction exponentielle $x\mapsto e^{-x}$), et pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $g(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$ et $v(x)=e^{-x}\Rightarrow v'(x)=-e^{-x}$, on aura :

$g'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times e^{-x}+(x+1)\left(-e^{-x}\right)=(1-x-1)e^{-x}\boxed{=-xe^{-x}}$

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$, la dérivée $g'(x)$ aura le même signe que $-x$, donc le signe opposé de *x*.

Ainsi, pour $x\in\left]-\infty;0\right[$, $g'(x)>0$. La fonction *g* est donc strictement croissante sur $\left]-\infty;0\right]$

Pour $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g'(x)<0$. La fonction *g* est donc strictement décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$

Elle atteint donc son maximum lorsque $x = 0$, lequel maximum vaut $g(0)=(0+1)e^{-0}=1$

Le tableau de variation de *g* est donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

c) Une primitive de *g* sur $\mathbb{R}$ est : $\boxed{G(x)=(-x-2)e^{-x}}$.

En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $G(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=-x-2\Rightarrow u'(x)=-1$ et $v(x)=e^{-x}\Rightarrow v'(x)=-e^{-x}$, on aura :

$G'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=-1\times e^{-x}+(-x-2)\left(-e^{-x}\right)=(-1+x+2)e^{x}=(x+1)e^{-x}=g(x)$

G est donc bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

jgcuaz@hotmail.com

3) L'inéquation $h(x)<0$ est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$h(x)<0 \Leftrightarrow f(x)-g(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)e^{x}-(x+1)e^{-x}<0$

$\Leftrightarrow (x+1)\left(e^{x}-e^{-x}\right)<0 \Leftrightarrow (x+1)\left(e^{x}-\frac{1}{e^{x}}\right)<0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\right)<0$

Etude du signe de l'expression $A(x)=(x+1)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\right)$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{x}>0$. De plus $x+1 \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1]$ et $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1;+\infty[$.

Enfin, $e^{2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$ et $e^{2x}-1 \leq 0 \Leftrightarrow e^{2x} \leq 1 \Leftrightarrow 2x \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{2x}-1$		$-$		$-$	0	$+$	
e^{x}		$+$		$+$		$+$	
$A(x)=(x+1)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit sur le tableau ci-dessus que $h(x)<0 \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{x}}\right)<0 \Leftrightarrow \boxed{x \in]-1;0[}$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $h(x)<0$ est donc $\boxed{S=]-1;0[}$

<u>fin du corrigé</u>

 jgcuaz@hotmail.com