CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS CTA/SD Sciences Humaines, option Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2007
EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $A(x)=(x-3)(x+1)=x^2+x-3x-3=x^2-2x-3$

2) (a) $e^{3x}-2e^{2x}-3e^{x}=0$.

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. On factorise par e^x :

$e^{3x}-2e^{2x}-3e^{x}=0 \Leftrightarrow e^x\left(e^{2x}-2e^x-3\right)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ ou $e^{2x}-2e^x-3=0$

L'équation $e^x=0$ n'ayant pas de solution réelle, on résout l'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$ en posant $X=e^x$. Ainsi $e^{2x}=\left(e^x\right)^2=X^2$ et l'équation $e^{2x}-2e^x-3=0$ devient équivalente à l'équation $X^2-2X-3=0$. Grâce à la factorisation de la question 1), on obtient $X^2-2X-3=0\Leftrightarrow (X-3)(X+1)=0\Leftrightarrow X=3$ ou $X=-1$

On revient à l'inconnue x en résolvant les équations $e^x=-1$ qui n'admet pas de solution réelle, et $e^x=3\Leftrightarrow x=\ln 3$. Ainsi $\boxed{S=\{\ln 3\}}$

(b) $3^{x^3-3x-1}=3^{2x^2-1}$

L'équation est définie sur $\mathbb{R}$. Par bijectivité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $X\to 2^X$, on obtient :

$3^{x^3-3x-1}=3^{2x^2-1}\Leftrightarrow x^3-3x-1=2x^2-1\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-2x-3\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x^2-2x-3=0$

On a déjà résolu, dans la question (a) l'équation $x^2-2x-3=0$, pour obtenir $x=3$ ou $x=-1$. Ainsi $\boxed{S=\{-1;0;3\}}$

(c) $\ln\left(x^3-3x\right)=\ln\left(2x^2\right)$

L'équation n'est définie que si et seulement si $x^3-3x>0\Leftrightarrow x\left(x^2-3\right)>0\Leftrightarrow x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0$ et $2x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$.

On dresse un tableau de signes de l'expression $x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\sqrt{3}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$	

Ainsi $x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)>0\Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$, qui est compatible avec la condition $x\neq 0$. On a donc $D_f=\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$

Pour tout $x\in\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$, $\ln\left(x^3-3x\right)=\ln\left(2x^2\right)\Leftrightarrow x^3-3x=2x^2\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0$, équation qui a été résolue en (b). On avait trouvé x = -1, 0 ou 3 . Sur ces trois solutions, seules –1 et 3 appartiennent à $D_f=\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$. Ainsi $\boxed{S=\{-1;3\}}$

(d) $\ln\left(x^3-3x+1\right)=\ln\left(2x^2+1\right)$

L'équation est définie si et seulement si $x^3-3x+1>0$ et $2x^2+1>0$ (cette dernière condition est automatiquement réalisée pour tout réel). Pour tout x tel que $x^3-3x+1>0$, $\ln\left(x^3-3x+1\right)=\ln\left(2x^2+1\right)\Leftrightarrow x^3-3x+1=2x^2+1\Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0$, équation qui a été résolue en (b). On avait trouvé x = -1, 0 ou 3 . Ces trois solutions vérifient la condition $x^3-3x+1>0$, donc $\boxed{S=\{-1;0;3\}}$

(e) L'équation $2\ln(1-x)+\ln(x+2)=\ln\left(x^2+1\right)+\ln 2$ n'est définie que si et seulement si $1-x>0\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;1\right[$ et $x+2>0\Leftrightarrow x\in\left]-2;+\infty\right[$ (la condition $x^2+1>0$ est automatiquement réalisée pour tout réel). L'ensemble de définition de l'équation est donc $\left]-\infty;1\right[\cap\left]-2;+\infty\right[=\left]-2;1\right[$

Pour tout $x \in \left]-2;-1\right[$, $2\ln(1-x)+\ln(x+2)=\ln\left(x^2+1\right)+\ln 2 \Leftrightarrow \ln\left[(1-x)^2\times(x+2)\right]=\ln\left(2\left(x^2+1\right)\right)$ (en utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien)

En utilisant la bijectivité de la fonction ln, l'équation devient équivalente à $(1-x)^2\times(x+2)=2\left(x^2+1\right)$, soit en développant, à $\left(1-2x+x^2\right)\times(x+2)=2x^2+2 \Leftrightarrow x-2x^2+x^3+2-4x+2x^2=2x^2+2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0$, équation qui a été résolue en (b). On avait trouvé x = -1, 0 ou 3 . Sur ces trois solutions, seules –1 et 0 appartiennent à l'ensemble de définition. Ainsi $\boxed{S=\{-1;0\}}$

(f) L'équation $2\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln\left(2x^2+2\right)$ n'est définie que si et seulement si $x-1>0 \Leftrightarrow x\in\left]1;+\infty\right[$ et $x+2>0 \Leftrightarrow x\in\left]-2;+\infty\right[$ (la condition $2x^2+2>0$ est automatiquement réalisée pour tout réel). L'ensemble de définition de l'équation est donc $\left]1;+\infty\right[\cap\left]-2;+\infty\right[=\left]1;+\infty\right[$

Pour tout $x\in\left]1;+\infty\right[$, $2\ln(x-1)+\ln(x+2)=\ln\left(2x^2+2\right) \Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2\times(x+2)\right]=\ln\left(2x^2+2\right)$ (en utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien)

En utilisant la bijectivité de la fonction ln, l'équation devient équivalente à $(x-1)^2\times(x+2)=2x^2+2$, soit en développant, à $\left(x^2-2x+1\right)\times(x+2)=2x^2+2 \Leftrightarrow x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2=2x^2+2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-3x=0$, équation qui a été résolue en (b). On avait trouvé x = -1, 0 ou 3 . Sur ces trois solutions, seule 3 appartient à l'ensemble de définition. Ainsi $\boxed{S=\{3\}}$

Exercice n°2

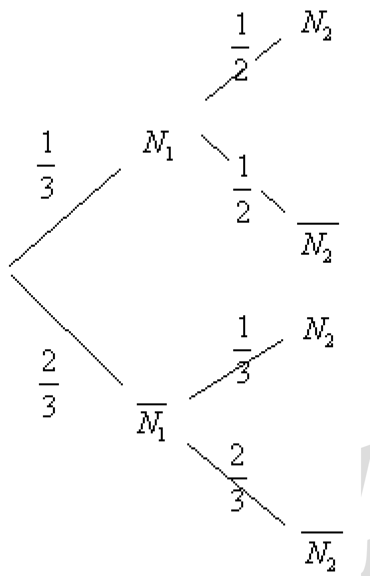
Si on note N_1 l'événement *la boule tirée de la première urne est noire* et N_2 l'événement *la boule tirée de la seconde urne est noire* ; l'énoncé nous permet de donner les probabilités suivantes :

$p(N_1)=\dfrac{1}{3}$ car dans la première urne, il y a une boule noire opur deux boules blanches (donc un total de 3 boules). Ainsi $p\left(\overline{N_1}\right)=1-p(N_1)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

De plus, si on réalise l'événement N_1, la deuxième urne contiendra 3 boules noires pour un total de 6 boules. Ainsi $p_{N_1}(N_2)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$ donc $p_{N_1}\left(\overline{N_2}\right)=1-p_{N_1}(N_2)=\dfrac{1}{2}$

De plus, si on ne réalise pas l'événement N_1, la deuxième urne contiendra 2 boules noires pour un total de 6 boules. Ainsi $p_{\overline{N_1}}(N_2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ et par suite $p_{\overline{N_1}}\left(\overline{N_2}\right)=1-p_{\overline{N_1}}(N_2)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

On peut résumer la situation par l'arbre de probabilité suivant :



(a) On applique la **formule des probabilités totales** au système complet d'événement $\left(N_1;\overline{N_1}\right)$. On obtient :

$p(N_2)=p(N_1\cap N_2)+p\left(\overline{N_1}\cap N_2\right)$

$=p(N_1)\,p_{N_1}(N_2)+p\left(\overline{N_1}\right)p_{\overline{N_1}}(N_2)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{9}=\boxed{\dfrac{7}{18}}$

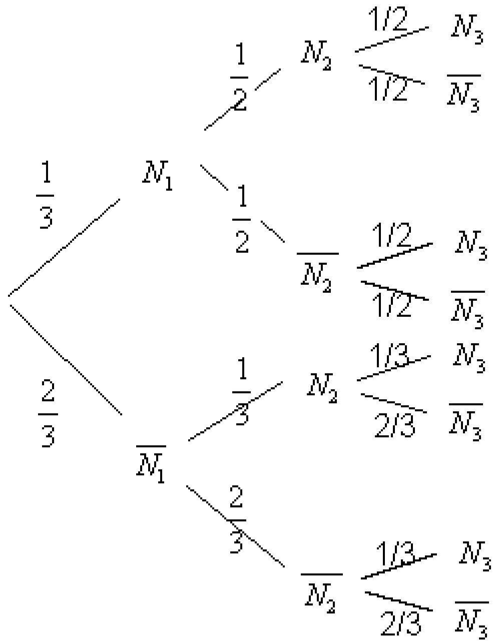
 jgcuaz@hotmail.com

(b) On cherche $p_{N_2}\left(N_1\right)=\dfrac{p\left(N_1\cap N_2\right)}{p\left(N_2\right)}=\dfrac{p\left(N_1\right)p_{N_1}\left(N_2\right)}{p\left(N_2\right)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{7}{18}}=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{18}{7}=\boxed{\dfrac{3}{7}}$

On introduit maintenant un troisième événement N_3 l'événement *la deuxième boule tirée de la deuxième urne est noire*

(a) Puisqu'on a remis en place la première boule tirée de la deuxième urne, la configuration de cette urne n'a pas changé, ce qui nous autorise à affirmer que $\boxed{p\left(N_3\right)=p\left(N_2\right)=\dfrac{7}{18}}$

Pour s'en convaincre, on peut dresser un nouvel arbre de probabilité :



et calculer

$$p\left(N_3\right)=p\left(N_1\cap N_2\cap N_3\right)+p\left(N_1\cap\overline{N_2}\cap N_3\right)+p\left(\overline{N_1}\cap N_2\cap N_3\right)+p\left(\overline{N_1}\cap\overline{N_2}\cap N_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{2}{27}+\frac{4}{27}=\frac{18}{108}+\frac{24}{108}=\frac{42}{108}=\boxed{\frac{7}{18}}$$

(b) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événement $\left(N_1;\overline{N_1}\right)$. On obtient :

$$p\left(N_2\cap N_3\right)=p\left(N_1\cap N_2\cap N_3\right)+p\left(\overline{N_1}\cap N_2\cap N_3\right)$$

$$=p\left(N_1\right)p_{N_1}\left(N_2\cap N_3\right)+p\left(\overline{N_1}\right)p_{\overline{N_1}}\left(N_2\cap N_3\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}+\frac{2}{27}=\frac{9}{108}+\frac{8}{108}=\boxed{\frac{17}{108}}$$

(c) On cherche $p_{N_2}\left(N_3\right)=\dfrac{p\left(N_2\cap N_3\right)}{p\left(N_2\right)}=\dfrac{\frac{17}{108}}{\frac{3}{7}}=\dfrac{17}{108}\times\dfrac{18}{7}=\boxed{\dfrac{17}{42}}$

2) <u>1ère rédaction : loi binomiale :</u>

Notons S l'événement « on a obtenu un succès » c'est-à-dire $p\left(S\right)=p\left(N_1\cap N_2\right)=p\left(N_1\right)_{N_1}\ p\left(N_2\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

La probabilité d'un échec est alors $p\left(\overline{S}\right)=1-p\left(S\right)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

 jgcuaz@hotmail.com

Si on répète l'expérience de manière indépendante 4 fois de suite, et si on note X la variable aléatoire égale au nombre de succès sur les 4 répétitions, X suit une loi binomiale de paramètre 4 et $\frac{1}{6}$.

Ainsi, pour tout entier $0 \leq k \leq 4$, $p(X = k) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$.

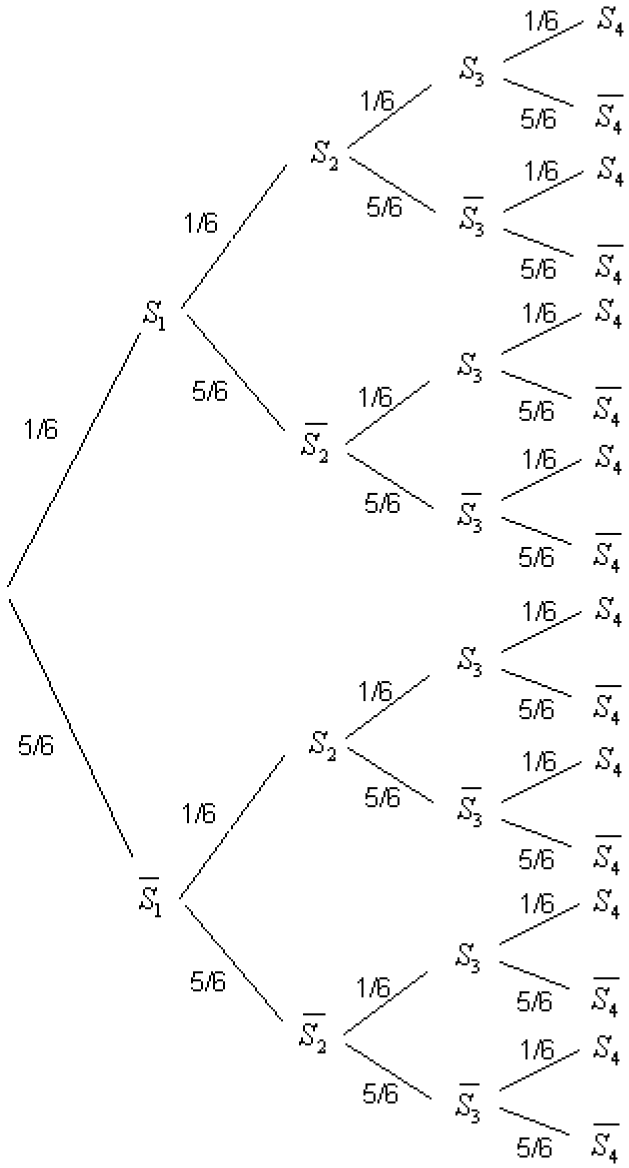
La probabilité d'observer exactement deux succès est alors égale à :

$$p(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4\times3}{2}\times\frac{1}{36}\times\frac{25}{36} = \frac{25}{6\times36} \boxed{= \frac{25}{216}}$$

2ème rédaction : arbre de probabilité :

Notons S_1, S_2, S_3, S_4 les événements « on obtient un succès à la 1ère répétition (respectivement 2ème, 3ème et 4ème répétition) »

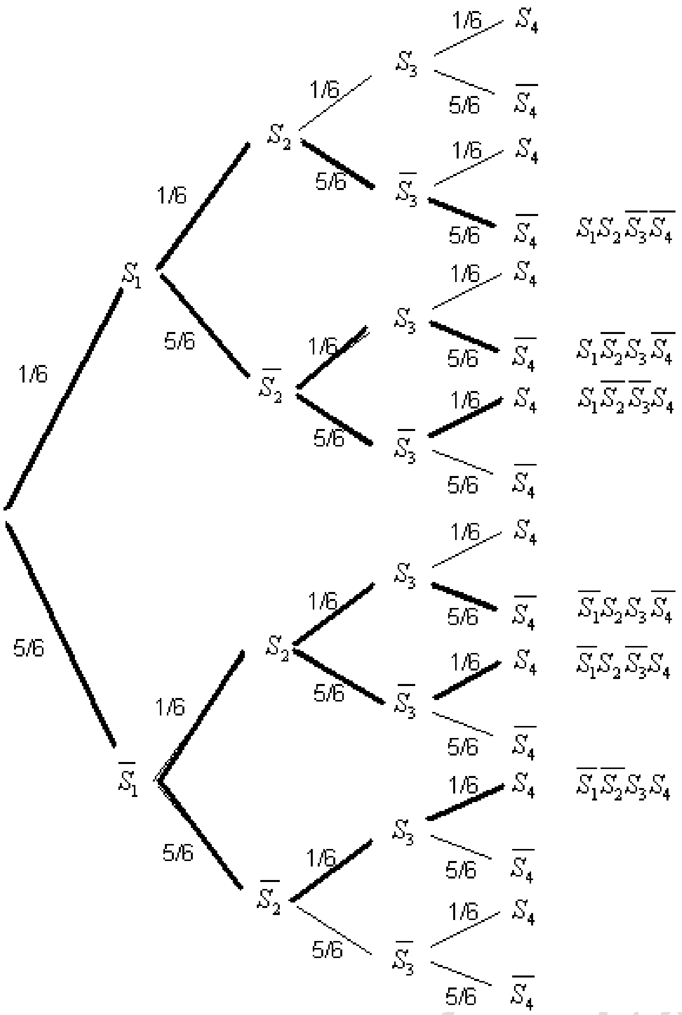
Puisque les répétitions sont indépendantes l'une de l'autre, on obtient, pour tout entier *i*, $p(S_i) = \frac{1}{6}$ donc $p\left(\overline{S_i}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. On dresse l'arbre de probabilité suivant :



On compte le nombre de chemins correspondant à exactement deux succès.

Ils sont au nombre de 6 ($S_1S_2\overline{S_3}\,\overline{S_4}$, $S_1\overline{S_2}S_3\overline{S_4}$, $\overline{S_1}S_2S_3\overline{S_4}$, $S_1\overline{S_2}\,\overline{S_3}S_4$, $\overline{S_1}S_2\overline{S_3}S_4$, $\overline{S_1}\,\overline{S_2}S_3S_4$), chacune de ces 6 chemins étant de probabilité $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$. Les voici représentés :

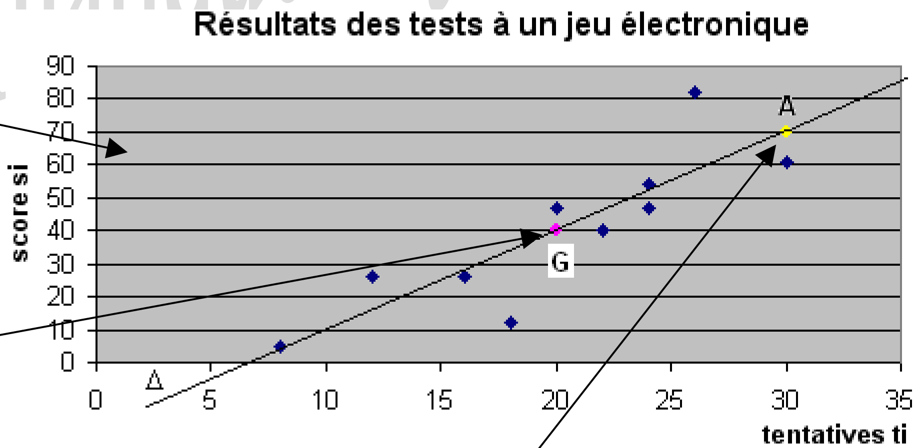
jgcuaz@hotmail.com



On retrouve donc le calcul $4\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\left(\frac{5}{6}\right)^2=\boxed{\frac{25}{216}}$

Exercice n°3

1) Nuage de points :



2) Le point moyen G a pour coordonnées : $G\left|\begin{array}{l} x_G=\bar{s}=\dfrac{\sum t_i}{10}=20 \\ y_G=\bar{t}=\dfrac{\sum s_i}{10}=40 \end{array}\right.$, placé sur le graphique

3) L'équation de la droite Δ des moindres carrés est de la forme $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{Cov(t;s)}{V(t)}$ et $G\in\Delta$

Or $Cov(t;s)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10}t_is_i-\bar{t}\times\bar{s}=\dfrac{1}{10}\times 9190-20\times 40=919-800=119$.

De plus $V(t)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10}t_i^2-\left(\bar{t}\right)^2=\dfrac{1}{10}\times 4400-20^2=440-400=40$. Ainsi, $m=\dfrac{119}{40}=2{,}975$

Comme $G\in\Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ, c'est-à-dire $y_G=mx_G+p\Leftrightarrow 40=2{,}975\times 20+p$ donc $p=-19{,}5$, et l'équation de Δ est finalement $\boxed{y=2{,}975x-19{,}5}$.

Pour la tracer, deux points suffisent. On a déjà le point G. On détermine un autre point, en prenant par exemple $x=30\Rightarrow y=2{,}975\times 30-19{,}5=69{,}75$, d'où le point A(30 ; 69,75)

 jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°4

1) f est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que carré d'une fonction qui l'est, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, puisque $f(x)=\left(u(x)\right)^2$ avec $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$, on aura $f'(x)=2u(x)\times u'(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}=\boxed{\frac{2\ln x}{x}}$

2) f est définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $|x|>0$ (à cause du logarithme népérien) et $x\neq 0$ (à cause du quotient). Ainsi $\boxed{D=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[}$. Le domaine D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x\in D$,
$g(-x)=\frac{\left(\ln|-x|\right)^2}{-x}=-\frac{\left(\ln|x|\right)^2}{x}=-g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g(x)=\frac{\left(\ln x\right)^2}{x}$, et par croissance comparée (la fonction $x\to x$ « l'emporte en $+\infty$ » sur la fonction $x\to(\ln x)^2$), on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty}g(x)=0}$. Enfin puisque $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$, on aura, par composition avec la fonction carré, $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}(\ln x)^2=+\infty$, puis enfin par division par $x>0$, $\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}g(x)=+\infty}$

Pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $g(x)=\frac{\left(\ln(-x)\right)^2}{x}=-\frac{\left(\ln(-x)\right)^2}{-x}$. En posant $y=-x$, on aura $\lim_{x\to-\infty}y=+\infty$, et on se ramène à la détermination de $\lim_{y\to+\infty}-\frac{\left(\ln(y)\right)^2}{y}$, que l'on a calculé précédemment. On obtient ainsi $\boxed{\lim_{x\to-\infty}g(x)=0}$

Enfin puisque $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\ln(-x)=-\infty$ (car $-x>0$), on aura, par composition avec la fonction carré, $\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\left(\ln(-x)\right)^2=+\infty$, puis enfin par division par $x<0$, $\boxed{\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}g(x)=-\infty}$

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$, donc de la forme $g(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, où u et v sont dérivables sur $\left]0;+\infty\right[$, le dénominateur v ne s'annulant sur $\left]0;+\infty\right[$. La dérivée de u ayant été calculée dans la question 1, on obtient :

$$g'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{\frac{2\ln x}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\boxed{\frac{\ln x\left(2-\ln x\right)}{x^2}}$$

Pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $g(x)=\frac{\left(\ln(-x)\right)^2}{x}$, donc de la forme $g(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$, où u et v sont dérivables sur $\left]-\infty;0\right[$, le dénominateur v ne s'annulant sur $\left]-\infty;0\right[$. On obtient :

$$g'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{\frac{2\ln(-x)}{x}\times x-\left(\ln(-x)\right)^2}{x^2}=\frac{2\ln(-x)-\left(\ln(-x)\right)^2}{x^2}=\boxed{\frac{\left(\ln(-x)\right)\left(2-\ln(-x)\right)}{x^2}}$$

3) Puisque g est impaire, on se contentera d'une étude sur $\left]0;+\infty\right[$

Pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g'(x)=\frac{\ln x\left(2-\ln x\right)}{x^2}$. Puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $x^2>0$, $g'(x)$ aura le même signe que l'expression $\ln x\left(2-\ln x\right)$

Or $\ln x=0\Leftrightarrow x=1$ et $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$. De plus $2-\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$ et $2-\ln x>0\Leftrightarrow\ln x<2\Leftrightarrow x<e^2\Leftrightarrow x\in\left]0;e^2\right[$ (car n'oublions pas que $x\in\left]0;+\infty\right[$)

On dresse donc le tableau de signes de l'expression $\ln x\left(2-\ln x\right)$ donc de la dérivée $g'(x)$:

jgcuaz@hotmail.com

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$2-\ln x$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x(2-\ln x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)=\dfrac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, g est strictement décroissante sur $]0;1]$, strictement croissante sur $\left[1;e^2\right]$ et strictement croissante sur $\left[e^2;+\infty\right[$.

Elle atteint donc un minimum local pour $x=1$, lequel minimum vaut $g(1)=\dfrac{(\ln 1)^2}{1^2}=\dfrac{(0)^2}{1}=0$, et un maximum local pour $x=e^2$, lequel maximum local vaut $g\left(e^2\right)=\dfrac{\left(\ln e^2\right)^2}{e^2}=\dfrac{(2\ln e)^2}{e^2}=\dfrac{(2)^2}{e^2}=\dfrac{4}{e^2}$

Par imparité, on peut donc dresser le tableau de variation de g sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, en y faisant figurer les limites de la question 2) et les extremums locaux.

On obtient :

x	$-\infty$		$-e^2$		-1		0		1		e^2		$+\infty$
$g(x)$	0	↘	$-\dfrac{4}{e^2}$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

4) Puisque $a>0$, on se place donc sur l'intervalle $]0;+\infty[$, inetrvalle sur lequel $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}=\dfrac{1}{x}(\ln x)^2=u'(x)\left[u(x)\right]^2$ où $u(x)=\ln x$. g étant continue sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, elle admet sur $]0;+\infty[$ une infinité de primitives. L'une d'enter elles est la fonction G définie sur $]0;+\infty[$ par $G(x)=\dfrac{\left[u(x)\right]^3}{3}=\dfrac{(\ln x)^3}{3}$, et ainsi :

$$\int_1^a g(x)\,dx=\left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^a=\frac{\left(\ln e^2\right)^3}{3}-\frac{(\ln 1)^3}{3}=\frac{(2)^3}{3}-\frac{0^3}{3}\boxed{=\frac{8}{3}}$$

5) D'après le tableau de variations, on peut établir que :

Si $m<0$, l'équation $g(x)=m$ n'admet aucune solution positive

Si $m=0$, l'équation $g(x)=m$ admet une solution positive qui est $x=1$

Si $0<m<\dfrac{4}{e^2}$, l'équation $g(x)=m$ admet trois solutions positives

Si $m=\dfrac{4}{e^2}$, l'équation $g(x)=m$ admet deux solutions positives (dont $x=e^2$)

Si $m\in\left]\dfrac{4}{e^2};+\infty\right[$, l'équation $g(x)=m$ admet une unique solution positive (appartenant à]0 ;1[)

<u>fin du corrigé</u>

jgcuaz@hotmail.com