

CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS CTA/SD Sciences Humaines, option Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2006

EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr, jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

Site de commerce électronique

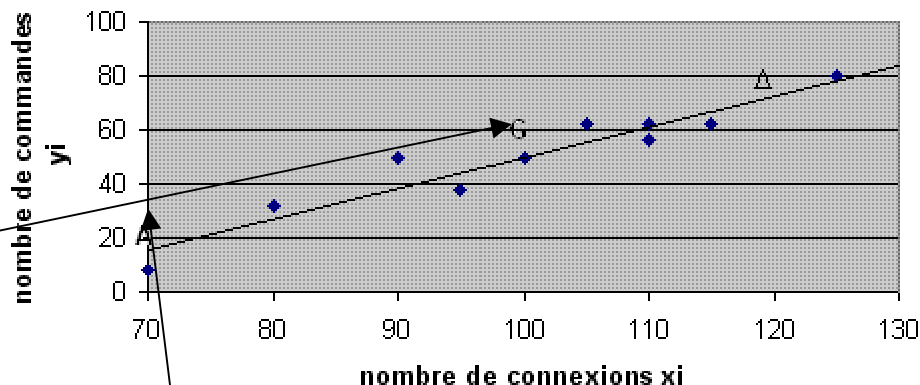
1) Nuage de points :

(l'origine des abscisses est 70)

2) Le point moyen G a pour

coordonnées : $G \left(\begin{aligned} x_G = \bar{x} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = 100 \\ y_G = \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = 50 \end{aligned} \right.$,

placé sur le graphique



3) L'équation de la droite Δ des

moindres carrés est de la forme $y = mx + p$ avec $m = \frac{\text{Cov}(x; y)}{V(x)}$ et $G \in \Delta$

Or $\text{Cov}(x; y) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i y_i - \bar{x} \times \bar{y} = \frac{1}{10} \times 52850 - 100 \times 50 = 5285 - 5000 = 285$.

De plus $V(x) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{10} \times 102500 - 100^2 = 10250 - 10000 = 250$. Ainsi, $m = \frac{285}{250} = \frac{57}{50} = 1,14$

Comme $G \in \Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ , c'est-à-dire $y_G = mx_G + p \Leftrightarrow 50 = 1,14 \times 100 + p$ donc $p = -64$, et l'équation de Δ est finalement $y = 1,14x - 64$.

Pour la tracer, deux points suffisent. On a déjà le point G . On détermine un autre point, en prenant par exemple $x = 70 \Rightarrow y = 1,14 \times 70 - 64 = 79,8 - 64 = 15,8$, d'où le point $A(70 ; 15,8)$

Exercice n°2

1) f est définie pour toutes les valeurs de x telles que $|x| > 0$, c'est-à-dire $D =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. L'ensemble de définition de f étant symétrique par rapport à zéro, pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -x \ln(|-x|) = -x \ln(|x|) = -f(x)$ donc f est impaire.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} |x| = +\infty$, et puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln(u) = +\infty$, alors en posant $u = |x|$, on obtient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|x|) = +\infty$, puis par produit

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(|x|) = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. De la même manière, puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = +\infty$, on obtient

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(|x|) = +\infty$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln(|x|) = -\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Enfin, $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0^+$, et puisque $\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln(u) = -\infty$, on en déduit, en posant $u = |x|$, que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(|x|) = -\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$,

on obtient alors une forme indéterminée « $0 \times -\infty$ ». Pour la résorber, deux solutions s'offrent à nous :

- ou on applique la règle de croissance comparée : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(|x|) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(|x|) = 0$ car toute fonction polynômiale

« l'emporte » sur la fonction logarithme népérien

- ou on distingue deux cas (ce que nous aurons à faire tôt ou tard !):

Si $x > 0$, $|x| = x$ donc $f(x) = x \ln(x)$ et alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$ (limite bien connue, elle aussi de « croissance comparée »)

Si $x < 0$, $|x| = -x$ donc $f(x) = x \ln(-x) = -(-x) \ln(-x)$. En posant $u = -x$, on se retrouve à examiner la limite $\lim_{\substack{u \rightarrow 0 \\ u > 0}} -u \ln(u)$ qui est identique à la précédente. Ainsi $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -(-x) \ln(-x) = 0$ c'est-à-dire $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$.

Sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$, f est dérivable en tant que composée et produit de fonctions qui le sont.

Pour tout $x \in]-\infty; 0[$, puisque $f(x) = x \ln(-x)$, on en déduit, par applications successives des formules de dérivation

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v' \text{ et } (\ln(u))' = \frac{u'}{u}, \text{ que } f'(x) = 1 \times \ln(-x) + x \times \frac{-1}{-x} = \ln(-x) + 1$$

Pour tout $x \in]0; +\infty[$, puisque $f(x) = x \ln(x)$, on en déduit que $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$

2) Puisque pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + 1$, on résout : $f'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \ln(\lambda) = -1 \Leftrightarrow \lambda = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Puisque $2,5 \leq e \leq 3$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2,5}$. Comme $\frac{1}{3} \geq 0,3$ et $\frac{1}{2,5} = 0,4$, on trouve l'encadrement annoncé.

3) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > \lambda$. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]0; \lambda[$ et strictement croissante sur $]\lambda; +\infty[$, d'où

le tableau de variations (avec $f(\lambda) = \lambda \ln(\lambda) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$)

x	0	λ	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{e}$	$+\infty$

4) On effectue une intégration par parties sur l'intervalle $[1; x]$, avec $x > 1$:

$$G(x) = \int_1^x g(t) dt = \int_1^x 1 \times \ln(t) dt$$

En notant $u(t) = \ln(t) \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = 1 \Rightarrow v(t) = t$, fonctions toutes les deux continûment dérivables sur $[1; x]$, on

$$\text{obtient } G(x) = [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u'(t)v(t) dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t dt = x \ln x - 1 \times \ln(1) - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$$

La fonction G définie sur $[1; +\infty[$ par $G(x) = x \ln x - x + 1$ est donc la primitive de la fonction g définie par $g(x) = \ln x$, qui s'annule en 1. Mais puisque toutes les primitives de la fonction g sont définies « à une constante près » ; la fonction $x \rightarrow x \ln x - x$ est aussi une primitive de g .

Exercice n°3

Notons A l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce truquée » et B l'événement « le lancer s'effectue avec la pièce équilibrée ». L'énoncé nous fournit $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$.

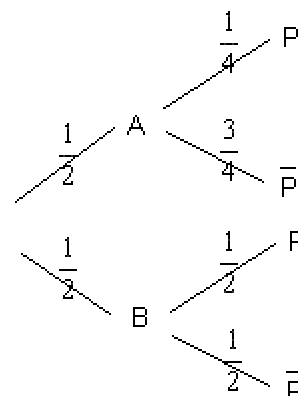
1) (a) Notons P la probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer. L'énoncé nous fournit

$$p_A(P) = \frac{1}{4} \text{ donc } p_A(\bar{P}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \text{ et } p_B(P) = \frac{1}{2} \text{ donc } p_B(\bar{P}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ceci peut se traduire par l'arbre de probabilités

La formule des probabilités totales appliquée au système complet $\{A; B\}$ fournit :

$$p(P) = p(A \cap P) + p(B \cap P) = p(A) \times p_A(P) + p(B) \times p_B(P) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



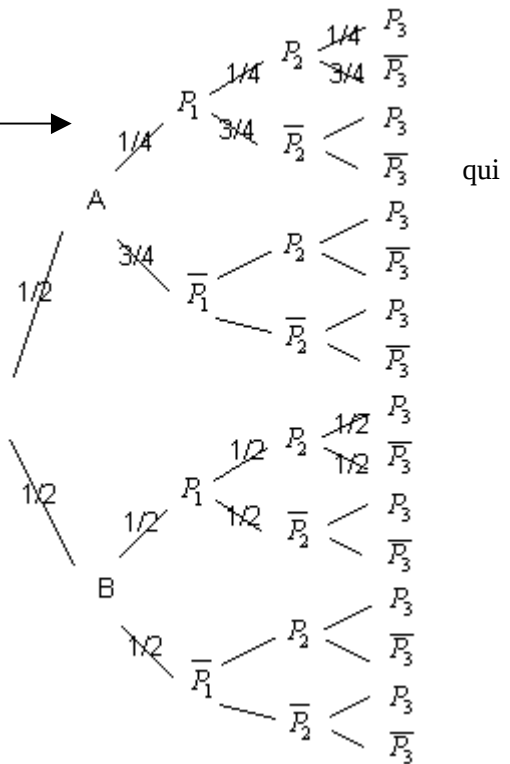
(b) On demande $p_P(A) = \frac{p(A \cap P)}{p(P)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$

(c) Notons P_1, P_2, P_3 les probabilités d'obtenir Pile respectivement aux tirages n°1, 2 et 3. On peut ainsi dresser l'arbre de probabilité :

Raisonnons avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », est « obtenir trois fois face ». D'après la formule des probabilités totales, ce dernier événement a pour probabilité :

$$\begin{aligned} p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) &= p(A \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3) + p(B \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\ &= p(A) \times p_A(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + p(B) \times p_B(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{128} + \frac{1}{16} = \frac{35}{128} \end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile avec une pièce choisie est donc égale à $1 - \frac{35}{128} = \frac{93}{128}$



2) La situation est cette fois ci différente de la question 1) (c) car on retire une pièce au hasard avant chaque lancer. On répète ainsi 3 fois consécutivement et de manière indépendante, l'épreuve de Bernoulli décrite dans la question 1) (a), qui admet deux issues : $p(P) = \frac{3}{8}$ donc $p(\bar{P}) = \frac{5}{8}$.

Le nombre de succès (obtention de Pile) sur les trois répétitions suit donc une loi binomiale de paramètre $p(P) = \frac{3}{8}$ et $n = 3$. On raisonne encore une fois avec l'événement contraire de « obtenir au moins une fois pile », qui est « obtenir trois fois face », de probabilité $(p(\bar{P}))^3 = \left(\frac{5}{8}\right)^3 = \frac{125}{512}$. La probabilité d'obtenir au moins une fois pile sur les trois lancers (et choix) est donc $1 - \frac{125}{512} = \frac{387}{512}$

3) Les résultats des deux pièces sont indépendants l'un de l'autre. Si on note P_A l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce truquée » et P_B l'événement « obtenir Pile à l'aide de la pièce équilibrée », l'événement cherché aura donc une probabilité égale à :

$$p(P_A \cap P_B) + p(F_A \cap F_B) = p(P_A) \times p(P_B) + p(F_A) \times p(F_B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°4

$$1) A(x) = (x-1)(x+1)(x-2) = (x^2-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

2) (a) On pose $X = e^x$. L'équation $e^{3x} - 2e^{2x} - e^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (e^x)^3 - 2(e^x)^2 - e^x + 2 = 0$ devient alors équivalente à $X^3 - 2X^2 - X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X+1)(X-2) = 0$ (d'après la factorisation de la question (1))

Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit. Ainsi $(X-1)(X+1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow X=1$ ou $X=-1$ ou $X=2$. En « revenant » à l'inconnue x , on a donc $e^x = 1$ ou $e^x = -1$ ou $e^x = 2$. Puisque pour tout réel x , $e^x > 0$, l'équation $e^x = -1$ n'admet pas de solutions réelle. En revanche $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$. Ainsi $S_a = \{0; \ln 2\}$

(b) Par bijectivité de la fonction exponentielle, $e^{x^3+2} = e^{2x^2+x} \Leftrightarrow x^3+2 = 2x^2+x \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2 = 0$ D'après la factorisation de la question (1), $x^3-2x^2-x+2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2) = 0$. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit. Ainsi $(x-1)(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$. Donc $S_b = \{-1; 1; 2\}$

(c) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x)$.

L'équation est bien définie si et seulement si $\begin{cases} x^3 + 2 > 0 \\ 2x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 > -2 \\ x(2x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt[3]{-2} \\ x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup]0; +\infty[\end{cases}$.

L'ensemble de définition de l'équation est donc $\left] \sqrt[3]{-2}; -\frac{1}{2} \right[\cup]0; +\infty[$. Par bijectivité de la fonction logarithme népérien, pour tout $x \in \left] \sqrt[3]{-2}; -\frac{1}{2} \right[\cup]0; +\infty[$, $\ln(x^3 + 2) = \ln(2x^2 + x) \Leftrightarrow x^3 + 2 = 2x^2 + x \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. On connaît les solutions de cette dernière équation (cf question (b)), et elles sont toutes les trois compatibles avec l'ensemble de définition. Ainsi $S_c = \{-1; 1; 2\}$.

(d) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$, puisque les quantités $|x|^3 + 2$ et $2x^2 + |x|$ sont strictement positives. En remarquant que pour tout réel x , $x^2 = |x|^2$, on va poser $X = |x|$. L'équation $\ln(|x|^3 + 2) = \ln(2x^2 + |x|) \Leftrightarrow \ln(|x|^3 + 2) = \ln(2|x|^2 + |x|)$ devient alors équivalente à $\ln(X^3 + 2) = \ln(2X^2 + X)$, avec la condition $X \geq 0$ (puisque $X = |x|$). D'après la question (c), on a $X = -1; 1; 2$. La valeur $X = -1$ est éliminée par la condition $X \geq 0$ (l'équation $|x| = -1$ n'admet pas de solution). En « revenant » à l'inconnue x , on a donc $X = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ ou $X = 2 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$. Ainsi $S_d = \{-2; -1; 1; 2\}$.

(e) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1)$.

Notons $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 3$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$. En remarquant que $f(1) = 0$, on peut donc factoriser $f(x)$ par $x - 1$. On obtient $f(x) = (x - 1)(x^2 - 3)$, d'où une factorisation aboutie égale à $f(x) = (x - 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, qui nous permet de dresser le tableau de signes de $f(x)$:

Ainsi $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\sqrt{3}; 1 \right[\cup \left] \sqrt{3}; +\infty \right[$

L'étude du signe de $g(x) = x^2 - 2x + 1$ est plus simple puisque pour tout réel x , $g(x) = (x - 1)^2$, donc $g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 1 \right[\cup \left] 1; +\infty \right[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $\left] -\sqrt{3}; 1 \right[\cup \left] \sqrt{3}; +\infty \right[$.

Par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

x	$-\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$
$x - 1$	-	0	+
$x - \sqrt{3}$	-	-	0
$x + \sqrt{3}$	-	0	+
$f(x)$	-	0	+

$$\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Cette dernière équation ayant pour solution $-1; 1$ et 2 , par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $S_e = \{-1; 2\}$.

(f) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1 - x)$.

Le membre de gauche $\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ est défini si et seulement si $x \in \left] -\sqrt{3}; 1 \right[\cup \left] \sqrt{3}; +\infty \right[$ (cf question (e)), tandis que le membre de droite est défini si et seulement si $1 - x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; 1 \right[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $\left] -\sqrt{3}; 1 \right[$. Pour tout $x \in \left] -\sqrt{3}; 1 \right[$, par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

$$\ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = 2\ln(1 - x) \Leftrightarrow \ln(x^3 - x^2 - 3x + 3) = \ln[(1 - x)^2]$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 3x + 3 = 1 - 2x + x^2 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Cette dernière équation ayant pour solution $-1; 1$ et 2 , par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $S_f = \{-1\}$.

fin du corrigé