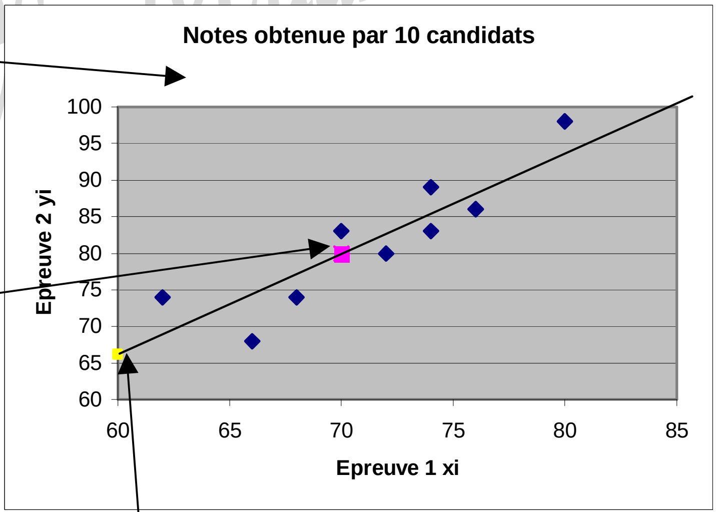
CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS CTA/SD Sciences Humaines, option Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2005
EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

<u>Exercice n°1</u>

1) Nuage de points :
(L'origine est (60 ;60) et 1 unité = 5 points sur chaque axe)



2) Le point moyen G a pour coordonnées : $G\begin{cases} x_G=\overline{x}=\dfrac{\sum x_i}{10}=\dfrac{700}{10}=70 \\ y_G=\overline{y}=\dfrac{\sum y_i}{10}=\dfrac{800}{10}=80 \end{cases}$, placé sur le graphique

3) L'équation de la droite Δ des moindres carrés est de la forme $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{Cov(x;y)}{V(x)}$ et $G\in\Delta$. Or $Cov(x;y)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10}x_iy_i-\overline{x}\times\overline{y}=\dfrac{1}{10}\times 56552-70\times 80=5655,2-5600=55,2$.

De plus $V(x)=\dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{i=10}x_i^2-\left(\overline{x}\right)^2=\dfrac{1}{10}\times 49400-70^2=4940-4900=40$. Ainsi, $m=\dfrac{55,2}{40}=1,38$

Comme $G\in\Delta$, ses coordonnées vérifient l'équation de Δ, c'est-à-dire $y_G=mx_G+p\Leftrightarrow 80=1,38\times 70+p$ donc $p=-16,6$, et l'équation de Δ est finalement $\boxed{y=1,38x-16,6}$.

Pour la tracer, deux points suffisent. On a déjà le point G. On détermine un autre point, en prenant par exemple $x=60\Rightarrow y=1,38\times 60-16,6=82,8-16,6=66,2$, d'où le point A(60 ; 66,2)

<u>Exercice n°2</u>

1) L'équation $e^{x-1}=e^{2x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et en utilisant la bijectivité de la fonction exponentielle, $e^{x-1}=e^{2x-1}\Leftrightarrow x-1=2x-1\Leftrightarrow x=0$. Ainsi $\boxed{S=\{0\}}$

2) L'équation $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=0$ n'est définie que si et seulement si $\dfrac{x-1}{2x-1}>0$.

On dresse un tableau de signes de l'expression $\dfrac{x-1}{2x-1}$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{2x-1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

L'équation $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=0$ n'est donc définie que si et seulement si $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$. En utilisant la bijectivité de la fonction ln, on obtient $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2x-1}=1\Leftrightarrow x-1=2x-1\Leftrightarrow x=0$. Puisque $0\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, on en conclut que $\boxed{S=\{0\}}$

3) L'équation $\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0$ n'est définie que si et seulement si $\dfrac{x-1}{2x-1}\neq 0$, donc d'après le tableau de signes ci-dessus, que si et seulement si $x\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$. En utilisant la bijectivité de la fonction ln, on obtient $\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right)=0\Leftrightarrow\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|=1\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{2x-1}=1$ ou $\dfrac{x-1}{2x-1}=-1$. La première équation a été résolue dans la question 2. La

deuxième est $\frac{x-1}{2x-1}=-1 \Leftrightarrow x-1=-2x+1 \Leftrightarrow 3x=2 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Ces deux solutions appartenant à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

4) L'équation $\ln(x-1)=\ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1>0 \Leftrightarrow x\in]1;+\infty[$ et $2x-1>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\cap]1;+\infty[=]1;+\infty[$. On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x\in]1;+\infty[$, $\ln(x-1)=\ln(2x-1) \Leftrightarrow x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$. Or $0\notin]1;+\infty[$, donc $\boxed{\text{l'équation n'admet pas de solution réelle}}$.

5) L'équation $\ln(|x-1|)=\ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $2x-1>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si $x\in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\cap \left(]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\right) = \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$. On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x\in \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$, $\ln(|x-1|)=\ln(2x-1) \Leftrightarrow |x-1|=2x-1$, ce qui équivaut à deux équations : $x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Puisque seule cette dernière solution appartient à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$

6) L'équation $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ et $2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si

$x\in \left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right) \cap \left(]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\right) = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[= \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$, $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|) \Leftrightarrow |x-1|=|2x-1|$, ce qui équivaut à deux équations :

$x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (déjà résolue dans la question 5)

Puisque ces deux solutions appartiennent à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

Exercice n°3

1) Notons A l'événement « Le microprocesseur fonctionne ». L'énoncé indique $p(\overline{A})=0,2$ donc $p(A)=1-p(\overline{A})=0,8$.

Si on assimile un lot de trois microprocesseurs aux tirages successifs et **indépendants** de trois objets pouvant être des microprocesseurs qui fonctionnent (événement A) ou défectueux (événement $\overline{A}$), et si on note X le nombre de microprocesseurs qui fonctionnent parmi les trois choisis, X suit alors une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p(A)=0,8$.

Ainsi, pour tout entier $0\leq k\leq 3$, $\boxed{p(X=k)=\underbrace{\binom{3}{k}}_{\text{coefficient binomial}} p(A)^k\, p(\overline{A})^{3-k}=\binom{3}{k}0,8^k 0,2^{3-k}}$

La probabilité qu'il y ait au moins deux microprocesseurs qui fonctionnent est égale à $p(X=2)+p(X=3)$, c'est-à-dire

$\boxed{\binom{3}{2}0,8^2 0,2^{3-2}+\binom{3}{3}0,8^3 0,2^{3-3}=3\times 0,8^2\times 0,2+0,8^3=0,896}$

2) Si on note B l'événement « le microprocesseur est accepté », l'énoncé fournit donc $p_A(B)=0,9$ (donc $p_A(\overline{B})=0,1$) et $p_{\overline{A}}(\overline{B})=0,6$ (donc $p_{\overline{A}}(B)=0,4$)

a) Le système d'événements $(A;\overline{A})$ étant complet, on applique la formule des probabilités totales pour calculer :

$$\boxed{\begin{array}{l} p(B)=p(A\cap B)+p(\overline{A}\cap B)=p(A)\,p_A(B)+p(\overline{A})\,p_{\overline{A}}(B) \\ =0{,}8\times 0{,}9+0{,}2\times 0{,}4=0{,}8 \end{array}}$$

La probabilité qu'un microprocesseur sortant de la machine soit accepté est donc égale à 0,8

b) On demande de calculer $\boxed{p_B(A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(B)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{p(A)\,p_A(B)}{0{,}8}=\dfrac{0{,}8\times 0{,}9}{0{,}8}=0{,}9}$

La probabilité qu'un microprocesseur accepté soit bon est donc égale à 0,9

Exercice n°4

1) La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il en sera de même pour les fonctions *f* et *g*.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=e^{-x}+e^{-(-x)}=e^{-x}+e^{x}=f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g(-x)=e^{-x}-e^{-(-x)}=e^{-x}-e^{x}=-\left(e^{x}-e^{-x}\right)=-g(x)$ donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$ (où on a posé $u=-x$), on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty}$

Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$ (où on a posé $u=-x$), on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty}$

3) La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, il en sera de même pour les fonctions *f* et *g*.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ $\boxed{f'(x)=e^{x}+(-1)e^{-x}=g(x)}$ et $\boxed{g'(x)=e^{x}-(-1)e^{-x}=e^{x}+e^{-x}=f(x)}$

Puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^{x}>0$ et $e^{-x}>0$, on en conclut que $f(x)>0$, c'est-à-dire $g'(x)>0$, donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$. Puisque *g* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque $g(0)=e^{0}-e^{-0}=1-1=0$, on en déduit que pour tout $x\in\left]-\infty;0\right[$, $g(x)<0$, c'est-à-dire $f'(x)<0$, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $g(x)>0$, c'est-à-dire $f'(x)>0$. $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement décroissante sur } \left]-\infty;0\right] \text{ et strictement croissante sur } \left[0;+\infty\right[}$

On résume dans deux tableaux de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(0)=2$	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4) Pour tout réel a,

$\left[f(a)\right]^2-\left[g(a)\right]^2=\left(e^{a}+e^{-a}\right)^2-\left(e^{a}-e^{-a}\right)^2$

$=\left(e^{a}\right)^2+2e^{a}e^{-a}+\left(e^{-a}\right)^2-\left(\left(e^{a}\right)^2-2e^{a}e^{-a}+\left(e^{-a}\right)^2\right)$

$=e^{2a}+2e^{0}+e^{-2a}-e^{2a}+2e^{0}-e^{-2a}=2+2$

$\boxed{=4}$

5) Pour tous réels a et b,

$f(a)g(b)+g(a)f(b)$

$=\left(e^{a}+e^{-a}\right)\left(e^{b}-e^{-b}\right)+\left(e^{a}-e^{-a}\right)\left(e^{b}+e^{-b}\right)$

$=e^{a}e^{b}-e^{a}e^{-b}+e^{-a}e^{b}-e^{-a}e^{-b}+e^{a}e^{b}+e^{a}e^{-b}-e^{-a}e^{b}-e^{-a}e^{-b}$

$=2e^{a}e^{b}-2e^{-a}e^{-b}=2\left(e^{a+b}-e^{-(a+b)}\right)$

$\boxed{=2g(a+b)}$

fin du corrigé

jgcuaz@hotmail.com