CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS 2011 - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n°1

On note $p_B(A)$ ou $p(A/B)$ la probabilité conditionnelle de *A* sachant *B*.

1) Soit *A*,*B* et *C* trois événements vérifiant $p(A\cap B)\neq 0$. Montrer que $p(A\cap B\cap C)=p(A)\,p_A(B)\,p_{A\cap B}(C)$.

2) Une urne contient 5 boules rouges, 3 jaunes et 2 vertes, indiscernables au toucher. On réalise trois tirages successifs sans remise. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 rouges ?

Exercice n°2

Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^2}-\dfrac{1}{\ln x}$, pour tout $x\in\,]1;+\infty[$.

1) Montrer que la dérivée de *f* est la fonction définie par : $f'(x)=\dfrac{\ln x-2}{x(\ln x)^3}$, pour tout $x\in\,]1;+\infty[$.

2) Déterminer les limites de *f* en 1 et en $+\infty$.

3) Déterminer le tableau de variations de *f*.

4) Soit *g* la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, pour tout $x\in\,]1;+\infty[$.

a) Calculer la dérivée *g'* de *g*.

b) Déterminer une primitive *F* de *f* sur $]1;+\infty[$

5) On désigne par u_n la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $\left[e^n;e^{n+1}\right]$ où *n* est un entier naturel non nul :

$$u_n=\frac{1}{e^{n+1}-e^n}\int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x)\,dx$$

a) Calculer u_n, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

b) Quelle est la limite de u_n, quand *n* tend vers l'infini ?

Exercice n°3

Dans le plan complexe (*P*) muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives $a=-1$ et $b=3i$.

Soit la fonction *f* de (*P*) privé du point *A* dans (*P*) qui, à tout point *M* d'affixe *z*, associe le point *M'* d'affixe *z'* telle que : $z'=i\left(\dfrac{z-3i}{z+1}\right)$

1) Soit *C* le point d'affixe $c=2-i$. Démontrer qu'il existe un seul point *D* tel que $f(D)=C$.

2) Déterminer la nature du triangle *ABC*.

3) Démontrer que, pour tout point *M* distinct de *A* et de *B*, on a : $OM'=\dfrac{BM}{AM}$.

4) Quels sont les points *M* tels que l'image *M'* soit située sur le cercle de centre *O* et de rayon 1 ?

Exercice n°4

On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies, $\forall n\in\mathbb{N}$, par $(S)\begin{cases}a_{n+1}=8a_n+1b_n\\ b_{n+1}=2a_n+9b_n\end{cases}$.

1) Démontrer qu'on peut écrire (*S*) sous la forme : $\begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}$ où *A* est une matrice 2×2 qu'on précisera.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n\geq 1$, on a : $\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\end{pmatrix}$.

3) On pose $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Démontrer que $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

4) Calculer le produit de matrices suivant : $B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $B^n=P\begin{pmatrix}7^n & 0\\ 0 & 10^n\end{pmatrix}P^{-1}$.

6) En déduire a_n et b_n en fonction de *n* lorsque $a_0=2$ et $b_0=1$.

<u>Analyse de processus</u>

<u>Exercice n°1</u>

n est un entier naturel et *i* une variable initialisée à la valeur 0.
Quel est l'effet de l'instruction suivante :

$$\text{tant que } \left(i^2\leq n\right) \text{ faire } i\leftarrow i+1 \text{ fin tant que } ?$$

Donner la valeur de la variable *i* après l'exécution de cette instruction.
Exécuter « à la main » cette instruction pour $n=7$ et $n=9$.

<u>Exercice n°2</u>

Ecrire un algorithme ou un organigramme permettant de résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{R}$.