CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE MILITAIRE INTERARMES
en 2010
EPREUVE DE MATHEMATIQUES ET D'ANALYSE DE PROCESSUS

Exercice n°1 (3 points)

On considère le polynôme $P(z)$ suivant : $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

1) Ecrire $1+i$ sous forme trigonométrique.
2) Calculer $P(1+i)$
3) Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$
4) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$ alors $\overline{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
5) Montrer que si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$ alors $z_0 \neq 0$ et $\frac{1}{z_0}$ est aussi une solution de cette équation.
6) Déterminer toutes les solutions de l'équation $P(z)=0$.

Exercice n°2 (4 points)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\ln(x)$
1) Etudier le sens de variations de *f* et déterminer les limites de *f* en $+\infty$ et en 0.
2) Tracer la courbe représentative (C) de *f* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
3) On pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx$, pour $\lambda > 0$.
a) En utilisant une intégration par parties, calculer $\int_{\lambda}^{1} \ln(x)\,dx$, pour $\lambda > 0$.
b) Calculer $I(\lambda)$, pour $\lambda > 0$.
c) Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0.

Exercice n°3 (3 points)

Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5, 3 bleues numérotées de 6 à 8 et 2 vertes numérotées de 9 à 10. On tire 2 boules simultanément de l'urne. On admet que tous les tirages sont équiprobables.
1) Calculer la probabilité de l'événement A « Les 2 boules ont des numéros impairs ».
2) Calculer la probabilité de l'événement B « Les 2 boules ont la même couleur ».
3) Calculer la probabilité de l'événement C « Les 2 boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur ».
4) Les événements A et B sont-ils indépendants ?
5) Calculer la probabilité de l'événement D « Les 2 boules sont de couleurs différentes et portent des numéros impairs ».
6) On vient de tirer 2 boules de couleurs différentes, quelle est la probabilité pour qu'elles portent des numéros impairs ?

Exercice n°4 (6 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n}$

1) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ 0 < u_n \leq 3$.

2) Démontrer que, pour tout entier non nul *n*, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(u_{n-1} - u_n)}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}$.

3) Démontrer que (u_n) n'est pas une suite monotone.

4) Montrer que si la suite (u_n) est convergente vers une limite *l*, alors *l* vérifie une équation du second degré que l'on déterminera.

5) Quelles sont les valeurs possibles de *l* ?

6) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $u_{n+1} - 1 = -\dfrac{u_n - 1}{1+u_n}$ et $u_{n+1} + 2 = 2\dfrac{u_n + 2}{1+u_n}$

7) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ? En déduire l'expression générale de v_n en fonction de *n*.

8) Démontrer alors que la suite $(u_n)_n$ est une suite convergente et déterminer sa limite.

Analyse de processus (4 points)

Exercice 1

Donner un logigramme correspondant à l'algorithme suivant :

Algorithme
fonction calculPériRectangle (longueur : réel, largeur : réel) : *réel*
début
lire(longueur,largeur)
périmètre<-2*(longueur+largeur)
retourne périmètre
fin

Exercice 2

1) Calculer le produit des matrices suivant : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) Ecrire un algorithme qui réalise ce produit.

Exercice 3

Définir une procédure *maximum* qui prend une liste de 10 éléments en argument et retourne le plus grand de la liste.
Exemple : *maximum*(1 4 2 0 36 0,5 12 17 6 23) = 36