CONCOURS EMIA – Sciences
CONCOURS 2010
EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1 (3 points)

1) Le module de $1+i$ vaut $|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Un argument θ de $1+i$ vérifie $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Un argument de $1+i$ est donc $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Une écriture de $1+i$ sous forme trigonométrique est donc $\boxed{1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$

2) On calcule :

$$P(1+i)=(1+i)^4-3(1+i)^3+\frac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1$$

$$=\left((1+i)^2\right)^2-3(1+i)(1+i)^2+\frac{9}{2}(1+i)^2-3(1+i)+1$$

$$=\left(1^2+2i+\underbrace{i^2}_{=-1}\right)^2-3(1+i)\left(1^2+2i+\underbrace{i^2}_{=-1}\right)+\frac{9}{2}\left(1^2+2i+\underbrace{i^2}_{=-1}\right)-3-3i+1$$

$$=(2i)^2-3(1+i)(2i)+\frac{9}{2}(2i)-3-3i+1$$

$$=-4-3\left(2i+2i^2\right)+9i-3-3i+1$$

$$=-4-3(2i-2)+9i-3-3i+1$$

$$=-4-6i+6+9i-3-3i+1$$

$$\boxed{=0}$$

3) Pour tout complexe z,

$$\overline{P(z)}=\overline{z^4-3z^3+\frac{9}{2}z^2-3z+1}=\overline{z^4}-\overline{3z^3}+\overline{\frac{9}{2}z^2}-\overline{3z}+\overline{1}=\left(\overline{z}\right)^4-3\left(\overline{z}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\overline{z}\right)^2-3\overline{z}+1=P\left(\overline{z}\right)$$

4) Si z_0 est une solution de l'équation $P(z)=0$, on aura successivement :

$P(z_0)=0$ donc $\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0$ c'est-à-dire, d'après la question précédente, $P\left(\overline{z_0}\right)=0$

$\boxed{\overline{z_0}\text{ est donc aussi une solution de l'équation }P(z)=0}$

5) Supposons que z_0 soit une solution de l'équation $P(z)=0$. On a donc $P(z_0)=0$

Remarquons que $z_0\neq 0$, car 0 n'est pas solution de l'équation $P(z)=0$

(en effet $P(0)=0^4-3\times 0^3+\frac{9}{2}\times 0^2-3\times 0+1=1$)

On calcule :

$$P\left(\frac{1}{z_0}\right)=\left(\frac{1}{z_0}\right)^4-3\left(\frac{1}{z_0}\right)^3+\frac{9}{2}\left(\frac{1}{z_0}\right)^2-3\left(\frac{1}{z_0}\right)+1=\frac{1}{z_0^{\ 4}}-3\times\frac{1}{z_0^{\ 3}}+\frac{9}{2}\times\frac{1}{z_0^{\ 2}}-3\times\frac{1}{z_0}+1$$

$$=\frac{1-3z_0+\frac{9}{2}z_0^{\ 2}-3z_0^{\ 3}+z_0^{\ 4}}{z_0^{\ 4}}=\frac{P(z_0)}{z_0^{\ 4}}=\frac{0}{z_0^{\ 4}}=0$$

$\boxed{\text{Ce qui prouve que }\frac{1}{z_0}\text{ est aussi une solution de l'équation }P(z)=0}$

6) D'après la question 2), on sait que $1+i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$

D'après la question 4), on en déduit que $\overline{1+i}=1-i$ est également une solution de l'équation $P(z)=0$.

D'après la question 5), on en déduit que $\dfrac{1}{1+i}$ et $\dfrac{1}{1-i}$ sont également solutions de l'équation $P(z)=0$.

On calcule $\dfrac{1}{1+i}=\dfrac{1\times(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1\times(1-i)}{1-i^2}=\dfrac{1-i}{2}$ et $\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1\times(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1\times(1+i)}{1-i^2}=\dfrac{1+i}{2}$.

L'équation $P(z)=0$ admet donc quatre solution distinctes : $1+i$; $1-i$; $\dfrac{1-i}{2}$ et $\dfrac{1+i}{2}$.

Exercice n°2 (4 points)

1) La fonction *f* est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x}{4}-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x^2-4}{2x}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{2x}$

Puisque $x\in\,]0;+\infty[$, le signe de $f'(x)$ sera donné par le signe de $(x-2)(x+2)$, donc par celui de $x-2$ (car pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $x+2>0$).

On en déduit que :

Pour tout $x\in\,]0;+2[$, $f'(x)<0$, $f'(2)=0$ et pour tout $x\in\,]2;+\infty[$, $f'(x)>0$.

La fonction *f* est donc strictement décroissante sur $]0;2]$ et strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

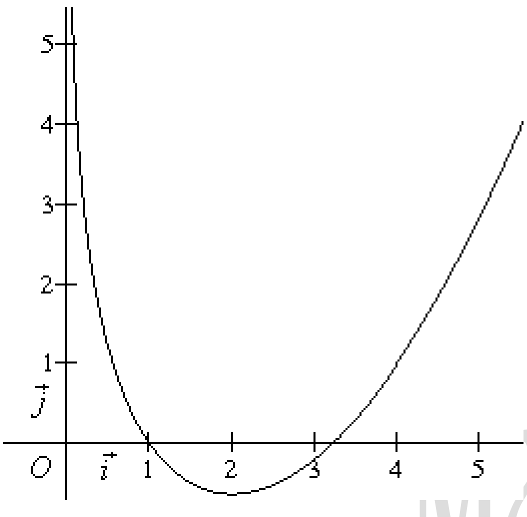
Enfin, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{x^2-1}{4}=\dfrac{0^2-1}{4}=-\dfrac{1}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$, donc par soustraction, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty}$.

De plus, pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right]$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ (limite dite « de croissance comparée »), on aura successivement :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x^2}=0$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right]=1$. Et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{4}x^2=+\infty$, on en déduit par produit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

2) La courbe représentative (C) de *f* dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ a pour allure :



 jgcuaz@hotmail.com

3) a) Pour tout $\lambda > 0$, on écrit $\int_{\lambda}^{1} \ln(x)\,dx = \int_{\lambda}^{1} 1 \times \ln(x)\,dx = \int_{\lambda}^{1} u'(x) \times v(x)\,dx$ où $u'(x) = 1 \Rightarrow u(x) = x$ et $v(x) = \ln(x) \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$, avec *u* et *v* dérivables et *u'* et *v'* continues sur tout intervalle de la forme $[\lambda;1]$ avec $\lambda > 0$.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$\int_{\lambda}^{1} \ln(x)\,dx = \int_{\lambda}^{1} u'(x) \times v(x)\,dx = \left[u(x) \times v(x)\right]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} u(x) \times v'(x)\,dx$$

$$= [x \ln x]_{\lambda}^{1} - \int_{\lambda}^{1} x \times \frac{1}{x}\,dx = 1 \times \ln 1 - \lambda \ln \lambda - \int_{\lambda}^{1} 1\,dx = -\lambda \ln \lambda - [x]_{\lambda}^{1} = \boxed{-\lambda \ln \lambda - 1 + \lambda}$$

b) Pour $\lambda > 0$, on calcule :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(x)\,dx = I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \left(\frac{x^2 - 1}{4} - 2\ln(x) \right) dx$$

$$= \int_{\lambda}^{1} \frac{x^2 - 1}{4}\,dx - 2\int_{\lambda}^{1} \ln x\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{4}x \right]_{\lambda}^{1} - 2(-\lambda \ln \lambda - 1 + \lambda)$$

$$= \frac{1^3}{12} - \frac{1}{4} \times 1 - \left(\frac{\lambda^3}{12} - \frac{1}{4}\lambda \right) + 2\lambda \ln \lambda + 2 - 2\lambda$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{\lambda^3}{12} + \frac{1}{4}\lambda + 2\lambda \ln \lambda + 2 - 2\lambda$$

$$= \boxed{-\frac{\lambda^3}{12} - \frac{7}{4}\lambda + 2\lambda \ln \lambda + \frac{11}{6}}$$

c) $\lim\limits_{\lambda \to 0} -\frac{\lambda^3}{12} = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} -\frac{7}{4}\lambda = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to 0} \lambda \ln \lambda = 0$ (limite célèbre de « croissance comparée ») donc $\lim\limits_{\lambda \to 0} 2\lambda \ln \lambda = 0$, donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{\lambda \to 0} I(\lambda) = \frac{11}{6}}$

<u>Exercice n°3 (3 points)</u>

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est constitué de l'ensemble des tirages simultanés de deux boules parmi 10. ainsi $Card(\Omega) = \binom{10}{2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$

Le modèle choisi est l'équiprobabilité des tirages.

1) Sur les 10 boules, 5 ont des numéros impairs. Ainsi $Card(A) = \binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ et par suite

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{10}{45} = \boxed{\frac{2}{9}}$$

2) L'événement B « Les 2 boules ont la même couleur » sera réalisé si et seulement on tire simultanément 2 boules blanches ou 2 boules bleues ou 2 boules vertes. Le nombre de tirages correspondant à cette situation sera donc égal à $Card(B) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 10 + 3 + 1 = 14$ et par suite $p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \boxed{\frac{14}{45}}$

3) L'événement C « Les 2 boules ont des numéros impairs et sont de la même couleur » sera réalisé si et seulement si on tire simultanément les 2 boules parmi les 3 boules blanches numérotées 1, 3 ou 5.

Ainsi $Card(C) = \binom{3}{2} = 3$ et par suite $p(C) = \frac{Card(C)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{45} = \boxed{\frac{1}{15}}$

 jgcuaz@hotmail.com

4) Les événements A et B seront indépendants si et seulement si $p(A\cap B)=p(A)p(B)$.

L'événement $A\cap B$ étant l'événement C, on aura d'une part $p(A\cap B)=p(C)=\frac{1}{15}$ et d'autre part $p(A)p(B)=\frac{2}{9}\times\frac{14}{45}=\frac{28}{405}$. L'égalité $p(A\cap B)=p(A)p(B)$ n'étant pas vérifiée, les événements A et B ne sont pas indépendants

5) Les événements C et D forment une partition de l'événement A.

Ainsi, $p(A)=p(C)+p(D)$ et par suite $p(D)=p(A)-p(C)=\frac{2}{9}-\frac{1}{15}=\frac{10}{45}-\frac{3}{45}=\boxed{\frac{7}{45}}$

6) On calcule $p_{\overline{B}}(A)=\dfrac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p\left(\overline{B}\right)}=\dfrac{p(D)}{1-p(B)}=\dfrac{\frac{7}{45}}{1-\frac{14}{45}}=\dfrac{\frac{7}{45}}{\frac{31}{45}}=\boxed{\frac{7}{31}}$

<u>Exercice n°4 (6 points)</u>

1) Démontrons par récurrence sur *n* que $\forall n\in\mathbb{N}\ \ 0<u_n\leq 3$

La propriété est vraie pour $n=0$ car par hypothèse $u_0=3$ donc $0<u_0\leq 3$.

Supposons que pour un certain entier $n\in\mathbb{N}$, on ait $0<u_n\leq 3$, et montrons qu'alors $0<u_{n+1}\leq 3$.

Si $0<u_n\leq 3$ alors on peut écrire successivement $1<1+u_n\leq 4$ puis $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{1+u_n}<1$ par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ puis $\frac{2}{4}\leq\frac{2}{1+u_n}<2$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}\leq u_{n+1}<2$. L'encadrement $0<u_{n+1}\leq 3$ est donc bien vérifié, ce qui achève l'étape d'hérédité et la démonstration par récurrence.

Ainsi, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ \ 0<u_n\leq 3}$

2) Pour tout entier non nul *n*, on a :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{1+u_n}-\frac{2}{1+u_{n-1}}=\frac{2(1+u_{n-1})}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}-\frac{2(1+u_n)}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}=\frac{2+2u_{n-1}-2-2u_{n-1}}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}=\boxed{\frac{2(u_{n-1}-u_n)}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}}.$$

3) Démontrons par l'absurde que (u_n) n'est pas une suite monotone.

De deux choses l'une.

Si (u_n) était une suite <u>strictement croissante</u>, cela signifierait que pour tout entier non nul *n*, on aurait $u_{n-1}<u_n$, c'est-à-dire $u_{n-1}-u_n<0$. Puisque pour tout entier non nul *n*, on a $u_n>0$ et $u_{n-1}>0$, on en conclurait, par application de la règle des signes, que pour tout entier non nul *n*, on aurait $\frac{2(u_{n-1}-u_n)}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}<0$, c'est-à-dire $u_{n+1}-u_n<0$ en vertu de l'égalité de la question 2), ou encore $u_{n+1}<u_n$. Ceci impliquerait donc que la suite serait <u>strictement décroissante</u>, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

De la même façon, si on suppose que (u_n) est une suite <u>strictement décroissante</u>, cela signifierait que pour tout entier non nul *n*, on aurait $u_{n-1}>u_n$, c'est-à-dire $u_{n-1}-u_n>0$. Puisque pour tout entier non nul *n*, on a $u_n>0$ et $u_{n-1}>0$, on en conclurait, par application de la règle des signes, que pour tout entier non nul *n*, on aurait $\frac{2(u_{n-1}-u_n)}{(1+u_n)(1+u_{n-1})}>0$, c'est-à-dire $u_{n+1}-u_n>0$ en vertu de l'égalité de la question 2), ou encore $u_{n+1}>u_n$. Ceci impliquerait donc que la suite serait <u>strictement croissante</u>, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

En conclusion, la suite (u_n) ne peut être ni strictement croissante, ni strictement décroissante. Elle n'est donc pas monotone.

jgcuaz@hotmail.com

4) La suite $\left(u_n\right)$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}=\frac{2}{1+u_n}=f\left(u_n\right)$ avec $f(x)=\frac{2}{1+x}$ fonction continue sur l'intervalle [0 ;3]. Si la suite $\left(u_n\right)$ converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=l$ et la limite l doit vérifier l'équation $f(l)=l \Leftrightarrow \frac{2}{1+l}=l \Leftrightarrow \boxed{l^2+l-2=0}$

5) On résout l'équation $l^2+l-2=0$ en calculant son discriminant : $\Delta=1^2-4\times1\times(-2)=9$

L'équation $l^2+l-2=0$ admet donc deux racines réelles $l_1=\frac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$ et $l_2=\frac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$.

Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0<u_n\leq 3$, la limite de la suite $\left(u_n\right)$ ne peut être égale à -2.

$\boxed{\text{En conclusion, la seule valeur possible pour } l \text{ est } 1}$.

6) On calcule :

Pour tout $n\geq 0$, on a $u_{n+1}-1=\frac{2}{1+u_n}-1=\frac{2}{1+u_n}-\frac{1+u_n}{1+u_n}=\frac{1-u_n}{1+u_n}=\frac{-u_n+1}{1+u_n}=-\frac{u_n-1}{1+u_n}$

Et $u_{n+1}+2=\frac{2}{1+u_n}+2=\frac{2}{1+u_n}+\frac{2\left(1+u_n\right)}{1+u_n}=\frac{4+2u_n}{1+u_n}=\frac{2u_n+4}{1+u_n}=2\frac{u_n+2}{1+u_n}$

7) Remarquons d'abord que la suite $\left(v_n\right)$ est bien définie car pour tout entier n, $u_n>0$ (donc $u_n+2\neq 0$)

D'après les calculs de la question 6), on peut écrire :

Pour tout entier n, $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2}=\frac{-\frac{u_n-1}{1+u_n}}{2\frac{u_n+2}{1+u_n}}=-\frac{u_n-1}{1+u_n}\times\frac{1+u_n}{2\left(u_n+2\right)}=-\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2}=-\frac{1}{2}v_n$

Ceci prouve que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\frac{u_0-1}{u_0+2}=\frac{2}{5}$

Ainsi, pour tout entier n, $\boxed{v_n=v_0\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

8) A partir de l'égalité $v_n=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \frac{u_n-1}{u_n+2}=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ valable pour tout entier n, on en déduit successivement que pour tout entier n, on a :

$$u_n-1=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(u_n+2\right) \Leftrightarrow u_n-1=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n u_n+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\Leftrightarrow u_n-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n u_n=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1 \Leftrightarrow u_n\left[1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_n=\frac{\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}{1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}}$$

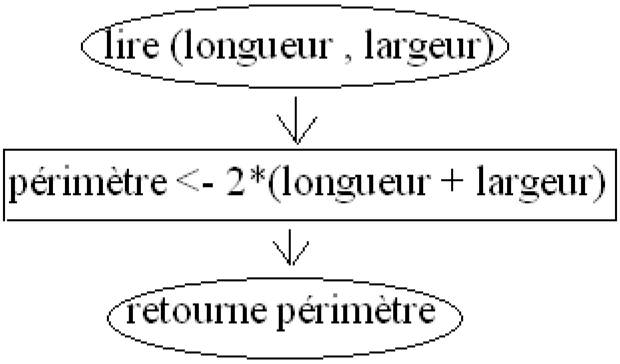
Puisque $-1<-\frac{1}{2}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1=1$ et de même $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n=1$, ce qui nous permet d'en déduire pare quotient que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1}$

jgcuaz@hotmail.com

Analyse de processus (4 points)

<u>Exercice 1</u>

Un logigramme correspondant à l'algorithme peut-être :



<u>Commentaires :</u>

Dans la syntaxe du logigramme :

L'ellipse représente un événement qui intervient automatiquement dans le procédé

Le rectangle représente une action

<u>Exercice 2</u>

1) On calcule :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 5 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times\sqrt{2}+1\times 3 & 2\times 5+1\times\sqrt{3} \\ 0\times\sqrt{2}+7\times 3 & 0\times 5+7\times\sqrt{3} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2\sqrt{2}+3 & 10+\sqrt{3} \\ 21 & 7\sqrt{3} \end{pmatrix}}$$

2) Un algorithme qui réalise ce produit peut-être :

<u>Algorithme</u>

Variable : matrice=tableau(4)

fonction calculproduitmatrice(*a* : matrice , *b* : matrice) : matrice

<u>début</u>

Variable : i entier

Pour i variant de 1 à 4

  lire a(i)

Pour i variant de 1 à 4

  lire b(i)

calculproduitmatrice(1)<-a(1)*b(1)+a(2)*b(3)

calculproduitmatrice(2)<-a(1)*b(2)+a(2)*b(4)

calculproduitmatrice(3)<-a(3)*b(1)+a(4)*b(3)

calculproduitmatrice(4)<-a(3)*b(2)+a(4)*b(4)

Pour i variant de 1 à 4

retourne *calculproduitmatrice*(i)

<u>fin</u>

<u>Exercice 3</u>

Variable : liste=tableau(10)

procedure maximum(*a* : liste) : réel

<u>début</u>

Variable : i entier , M : réel

Pour i variant de 1 à 10

  lire a(i)

M<-a(1)

Pour i variant de 2 à 10

  si a(i)>M alors M<-a(i)

retourne M

<u>fin</u>

<u>fin du corrigé</u>

jgcuaz@hotmail.com