CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2011 - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n°1

1) Soit L la matrice $\begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ où l est un réel ; montrer que pour toute matrice M carrée d'ordre 2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a : $ML = LM = lM$.

2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits suivants : AB, BA, BC et CB.

3) Déterminer les matrices M carrées d'ordre 2 telles que $AM = C$.
Remarque : On pourra penser à multiplier à gauche les deux membres de l'équation par B (à justifier !).

Exercice n°2

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 1$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer u_n en fonction de n.

3) La suite (u_n) est-elle croissante ? majorée ? convergente ? si oui préciser sa limite.

4) Soit la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{i=0}^{n} v_i$; exprimer s_n en fonction de n ; la suite est-elle convergente ? si oui déterminer sa limite.

5) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$; exprimer t_n en fonction de n ; la suite est-elle convergente ? si oui déterminer sa limite.

Exercice n°3

1) Soit le système d'équations $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x - 2y = -4 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$ où x et y sont des inconnues. Déterminer les solutions de ce système.

2) Représenter graphiquement (papier millimétré) l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 2x - 5y < 1 \\ 3x - 2y < -4 \end{cases}$.

Exercice n°4

Soit E l'ensemble des éventualités, soit A et B deux événements.
On note $p(A)$ la probabilité de A et $p(A/B)$ ou $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1) On suppose que $p(A/B) = p(B/A)$ et $p(A \cap B) \neq 0$; montrer que $p(A) = p(B)$.

2) Soit $\alpha = p(A \cup B)$ et on suppose, en outre, que A et B sont indépendants ; trouver une relation entre α et $p(A)$. En déduire que pour chaque valeur de α il existe une et une seule valeur de $p(A)$ possible. (application : $\alpha = \frac{8}{9}$; déterminer $p(A)$).

Exercice n°5

Démontrer que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{x+1}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(x+2\sqrt{x}\right)-\ln\left(x-1\right)=0$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{(x+1)}-e^{(x-1)}=+\infty$.

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^2-1\right)\ln\left|x-1\right|=0$.

Exercice n°6

1) Soit la fonction *f* définie par : $f\left(x\right)=\frac{2x-5}{x+3}$.

a) Déterminer son domaine de définition D_f.

b) Soit φ la fonction définie de D_f dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $\forall x\in D_f$, $\varphi(x)=f\left(x\right)$; est-elle surjective ? injective ? bijective ?

c) Déterminer les limites aux bornes de D_f de la fonction *f* puis sa dérivée et son tableau de variations.

2) Soit la fonction *g* définie par : $g\left(x\right)=\frac{2x^2-5}{x^2+3}$.

Déterminer son domaine de définition, sa parité, sa dérivée et son tableau de variations.

3) Soit la fonction *h* définie par : $h\left(x\right)=\ln\frac{2x-5}{x+3}$.

Déterminer son domaine de définition D_h, les limites aux bornes de D_h, sa dérivée et son tableau de variations.