

CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
CONCOURS 2010 - EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Exercice n°1

Soit M la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et N la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 10 & 13 \\ a & b & c \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ où a , b et c sont trois réels.

1) Montrer que l'équation $MN=NM$ admet une seule solution $(a \ b \ c)=(0 \ 1 \ 1)$

2) On prend désormais $(a \ b \ c)=(0 \ 1 \ 1)$ et soit alors $I=MN$. Déterminer I.

3) Soit B la matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}$; déterminer MB et NB.

4) Soit X la matrice $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; résoudre $MX=B$

Remarque : on pourra penser à multiplier à gauche les deux membres de l'équation par N (à justifier !)

Exercice n°2

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{4^n}$

1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3) En développant $(1+1)^n$, montrer que $2^n \geq n$

4) Soit la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{2^n}$; montrer que pour tout n on a $v_n \geq u_n$; en déduire la limite de (u_n)

5) Soit la suite (s_n) définie par $s_n = \sum_{i=0}^n v_i$; exprimer s_n en fonction de n ; en déduire que (s_n) est majorée par 2 et que (s_n) est convergente.

6) Soit la suite (t_n) définie par $t_n = \sum_{i=0}^n u_i$. Montrer que (t_n) est convergente.

Exercice n°3

Soit E l'ensemble des éventualités, soit A et B deux événements.

On note $p(A)$ la probabilité de A et $p(A/B)$ ou $p_B(A)$ la probabilité de A sachant B ; $\bar{A}$ l'événement contraire de A .

1) On pose : $p(A) = \frac{1}{4}$, $p(B/A) = \frac{1}{3}$ et $p(B/\bar{A}) = \frac{1}{2}$. Déterminer $p(B)$ et $p(A/B)$

2) Une urne contient 4 pièces dont une pipée (une pièce pipée amène pile avec une probabilité $\frac{1}{3}$ et une pièce normale amène pile avec une probabilité $\frac{1}{2}$). On tire une pièce de l'urne, on la lance, on amène pile, déduire de la question précédente la probabilité que la pièce soit normale.

Exercice n°4

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ et $g(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right|$

1) Pour chacune des deux fonctions préciser le domaine de définition, la parité éventuelle et les limites aux bornes du domaine de définition.

2) Soit la fonction i définie par $i(x) = \frac{x+1}{x-1}$; calculer la dérivée de i , en déduire la dérivée et le tableau de variation de f et de g

3) Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{1}{e^x - 1}$. Comment peut-on déduire Γ la courbe représentative de h à partir de C la courbe représentative de f (on pourra calculer $f(x) - 1$) ?

Exercice n°5

1) Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 3 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

2) Représenter graphiquement (papier millimétré) l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} y - x - 1 \geq 0 \\ y + x - 3 \geq 0 \end{cases}$$

3) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) tels que

$$\begin{cases} y - x - 1 \geq 0 \\ y + x - 3 \geq 0 \\ 2y - x - 3 \leq 0 \end{cases}$$