CONCOURS EMIA – Sciences Economiques et Sociales
EPREUVE DE MATHEMATIQUES - PROPOSITION DE CORRECTION
Corrigé **non officiel** rédigé par Jean-Guillaume CUAZ, enseignant au Lycée Militaire de Saint-Cyr , jgcuaz@hotmail.com

Exercice n°1

1) Considérons la matrice $L=\begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ où l est un réel et une matrice M carrée d'ordre 2, $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Les produits ML et LM sont légitimes car effectués entre deux matrices carrées de même dimensions et on a :

$$ML=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\times l+b\times 0 & a\times 0+b\times l \\ c\times l+d\times 0 & c\times 0+d\times l \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} al & bl \\ cl & dl \end{pmatrix}$$

Ainsi que $LM=\begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} l\times a+0\times c & l\times b+0\times d \\ 0\times a+l\times c & 0\times b+l\times d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} la & lb \\ lc & ld \end{pmatrix}$

Par commutativité de la multiplication on en déduit que $ML=LM$ et puisque $lM=\begin{pmatrix} l\times a & l\times b \\ l\times c & l\times d \end{pmatrix}$, on en déduit l'égalité demandée

2) Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Les quatre produits : *AB*, *BA*, *BC* et *CB* sont légitimes car effectués entre des matrices carrées de même dimensions. On a :

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+1\times 1 & 1\times(-1)+1\times 1 \\ (-1)\times 1+1\times 1 & (-1)\times(-1)+1\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times(-1) & 1\times 1+(-1)\times 1 \\ 1\times 1+1\times(-1) & 1\times 1+1\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+(-1)\times 3 & 1\times 2+(-1)\times 4 \\ 1\times 1+1\times 3 & 1\times 2+1\times 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Et $CB=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times 1+2\times 1 & 1\times(-1)+2\times 1 \\ 3\times 1+4\times 1 & 3\times(-1)+4\times 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

3) Puisque *A* et *M* sont des matrices carrées d'ordre 2, il en est de même du produit *AM*.
De plus *C* est une matrice carrée d'ordre 2.
Puisque *B* est une matrice carrée d'ordre 2, le produit à gauche des deux membres de l'équation par *C* est légitime.
A partir de l'équation *AM* = *C* on aboutit successivement à :

$BAM=BC$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ ou encore $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ d'après la question 1.

Par identification des termes, on obtient $M=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Comme nous avons procédé par condition nécessaire, une vérification s'impose :

Réciproquement, si on pose $M=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient bien :

$$AM=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times(-1)+1\times 2 & 1\times(-1)+1\times 3 \\ (-1)\times(-1)+1\times 2 & (-1)\times(-1)+1\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

L'égalité *AM* = *C* est donc vérifiée.

En conclusion, l'unique matrice telle que *AM* = *C* est la matrice $M=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice n°2

1) Pour tout entier naturel n>1,

$$v_n = u_n - 2 = u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + 1 - 2 = \frac{1}{2}u_{n-1} - 1.$$

Puisque pour tout entier naturel n>1, $v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2$, on aura :

$$v_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} + 2) - 1 = \frac{1}{2}v_{n-1} + 1 - 1 = \frac{1}{2}v_{n-1}.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -2$

2) Puisque la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -2$, on aura :

Pour tout entier naturel n, $v_n = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$, d'où l'on déduit :

Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = v_n + 2 = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}$,

3) Pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 - \left(-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) = -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left[-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^n[-1+2] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque pour tout entier naturel n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, on en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Puisque pour tout entier naturel n, $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0 \Leftrightarrow -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n < 2$. La suite (u_n) est donc majorée par 2.

Puisque la suite (u_n) est strictement croissante et majorée par 2, elle est donc convergente.

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 = 2$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2}$. La suite (u_n) converge donc vers 2.

4) Pour tout entier n, s_n représente la somme des n+1 premiers termes de la suite (v_n) dont on a démontré qu'elle était géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme -2.

$$\text{Ainsi, } s_n = \sum_{i=0}^{n} v_i = -2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = -2\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = \boxed{-4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

Puisque $-1 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$ et par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} -4\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = -4$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = -4}$. La suite (s_n) converge donc vers -4.

jgcuaz@hotmail.com

5) Puisque pour tout entier naturel n, $u_n = v_n + 2$, on aura donc :

$$t_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} (v_i + 2) = \sum_{i=0}^{n} v_i + \sum_{i=0}^{n} 2 = s_n + 2(n+1)$$

Nous avons vu dans la question précédente que $\lim_{n\to+\infty} s_n = -4$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} 2(n+1) = +\infty$, on en déduit par somme que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty}$. La suite (t_n) diverge donc.

<u>Exercice n°3</u>

1) On résout le système :

$$\begin{cases} 2x-5y=1 & L_1 \\ 3x-2y=-4 & L_2 \\ 2x+y=-5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6y=6 & L_1-L_3 \\ 3x=-4+2y & L_2 \\ 2x+y=-5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & L_1-L_3 \\ 3x=-4+2\times(-1) & L_2 \\ 2x+y=-5 & L_3 \end{cases}$$

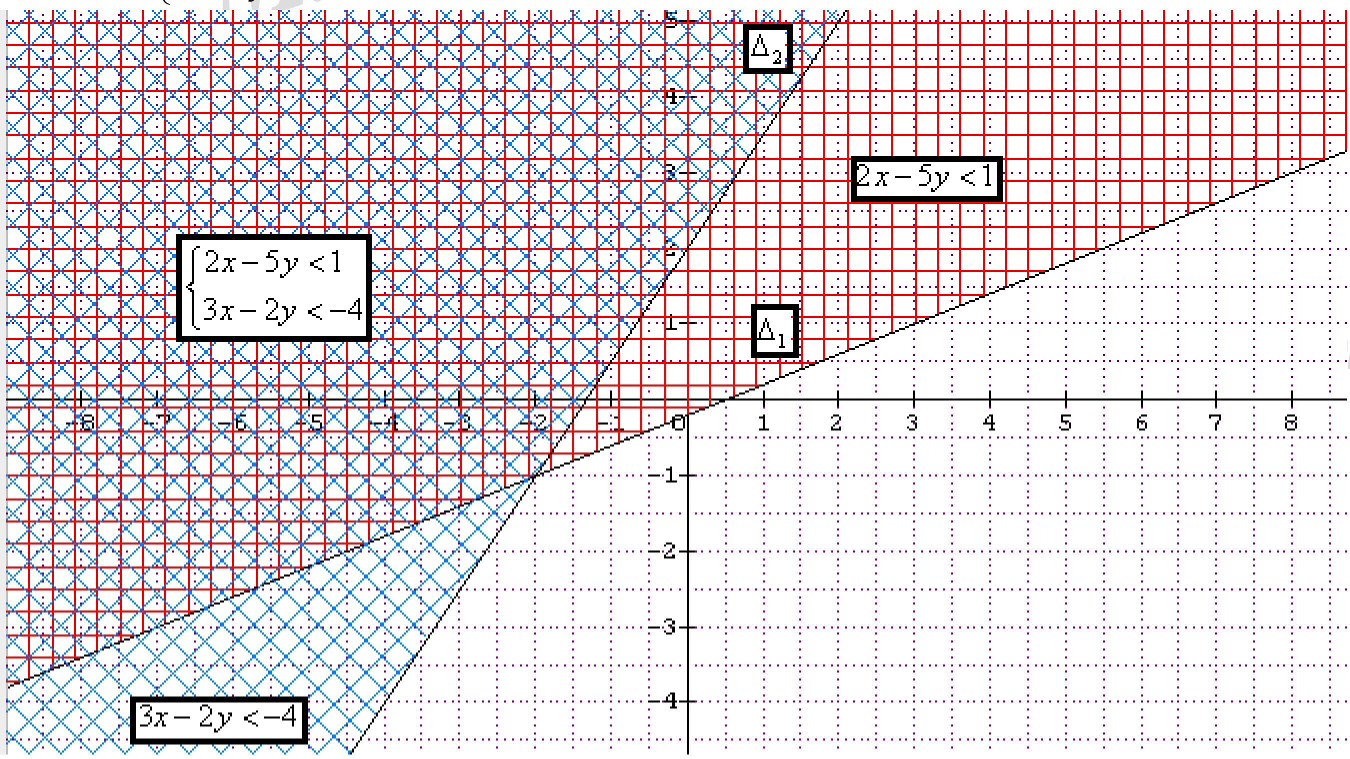
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & L_1-L_3 \\ 3x=-6 & L_2 \\ 2x+y=-5 & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 & L_1-L_3 \\ x=-2 & L_2 \\ 2\times(-2)+(-1)=-5 & L_3 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système est donc $\boxed{S=\{(-2;-1)\}}$.

2) Notons Δ_1 la droite d'équation $2x-5y=1 \Leftrightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}$. Elle partage le plan en deux demi plans d'inéquations respectives $2x-5y<1$ et $2x-5y>1$, et de frontière commune Δ_1.
Puisque les coordonnées du point O(0 ;0) vérifient l'inéquation $2\times0-5\times0<1$, le demi plan d'inéquation $2x-5y<1$ est celui contenant le point O (en rouge ci-dessous)

Notons Δ_2 la droite d'équation $3x-2y=-4 \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+2$. Elle partage le plan en deux demi plans d'inéquations respectives $3x-2y<-4$ et $3x-2y>-4$, et de frontière commune Δ_2.
Puisque les coordonnées du point O(0 ;0) ne vérifient pas l'inéquation $3x-2y<-4$, le demi plan d'inéquation $3x-2y<-4$ est celui ne contenant le point O (en bleu ci-dessous)

Le système $\begin{cases} 2x-5y<1 \\ 3x-2y<-4 \end{cases}$ admet pour ensemble de solutions les points bleus et rouges représentés ci-dessous :



Exercice n°4

1) Puisque l'énoncé évoque les probabilités conditionnelles $p(A/B)$ et $p(B/A)$ cela sous-entend que $p(A)\neq 0$ et $p(B)\neq 0$ (sinon, les probabilités conditionnelles ne sont pas définies)

Puisque $p(A/B)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ et $p(B/A)=\dfrac{p(B\cap A)}{p(A)}=\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$, l'égalité $p(A/B)=p(B/A)$ se traduit par

$$\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}\Leftrightarrow p(A)p(A\cap B)=p(B)p(A\cap B)\Leftrightarrow \boxed{p(A)=p(B)} \text{ car } p(A\cap B)\neq 0$$

2) Puisque $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$, on aura $p(A\cap B)=p(A)+p(B)-\alpha$

Puisque que A et B sont indépendants, on aura $p(A/B)=p(A)\Leftrightarrow \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A)\Leftrightarrow p(A\cap B)=p(A)p(B)$

Ainsi, $p(A)p(B)=p(A)+p(B)-\alpha$

Mais d'après la question 1), on a $p(A)=p(B)$. Ainsi $\boxed{\alpha=2p(A)-p(A)^2}$

Application : $\alpha=\dfrac{8}{9}$. $p(A)$ est solution de l'équation $p(A)^2-2p(A)+\dfrac{8}{9}=0\Leftrightarrow 9p(A)^2-18p(A)+8=0$

On résout l'équation $9x^2-18x+8=0$ en calculant son discriminant : $\Delta=(-18)^2-4\times 9\times 8=36$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes : $x_1=\dfrac{18-\sqrt{36}}{18}=\dfrac{2}{3}$ et $x_2=\dfrac{18+\sqrt{36}}{18}=\dfrac{4}{3}$.

Or $0\leq p(A)\leq 1$ donc seul $\boxed{p(A)=\dfrac{2}{3}}$ convient.

Exercice n°5

1) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1=+\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée "$\dfrac{+\infty}{+\infty}$"

Puisque $x\longrightarrow+\infty$, on peut supposer $x>0$.

Pour tout $x>0$, $\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x}=1$.

Par quotient, on en conclut que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$, c'est-à-dire que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x+1}=1}$

2) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x+2\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$, et puisque $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=+\infty$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+2\sqrt{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=+\infty$.

On est en présence d'une forme indéterminée "$+\infty-(+\infty)$"

Puisque $x\longrightarrow+\infty$, on peut supposer $x>1$ (et on doit même pour assurer l'existence de $\ln(x-1)$!)

Pour tout $x>1$, $\ln\left(x+2\sqrt{x}\right)-\ln\left(x-1\right)=\ln\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}\right)$

Or pour tout $x>1$, $\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}=\dfrac{x\left(1+\dfrac{2\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}}$

Comme dans la question précédente, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, on aura $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x}=1$.

On en conclut par quotient que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$ c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}=1$

Puisque $\lim\limits_{u\to1}\ln\left(u\right)=0$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}}{x-1}\right)=0$ c'est-à-dire que

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x+2\sqrt{x}\right)-\ln\left(x-1\right)=0}$

3) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x-1=+\infty$, et puisque $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(x+1)}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(x-1)}=+\infty$.

On est en présence d'une forme indéterminée $"+\infty-(+\infty)"$

Transformons l'écriture de l'expression :

Pour tout réel x, $e^{(x+1)}-e^{(x-1)}=e^{x}\times e^{1}-e^{x}\times e^{-1}=e^{x}\left[e-\dfrac{1}{e}\right]$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ et puisque $e-\dfrac{1}{e}>0$, on en conclut par produit que $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left[e-\dfrac{1}{e}\right]=+\infty$ donc que

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}e^{(x+1)}-e^{(x-1)}=+\infty}$

4) Dans un premier temps, $\lim\limits_{x\to1}\left(x^{2}-1\right)=0$

De plus $\lim\limits_{x\to1}\left|x-1\right|=0^{+}$ et puisque $\lim\limits_{v\to0^{+}}\ln\left(v\right)=-\infty$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{x\to1}\ln\left|x-1\right|=-\infty$.

On est en présence d'une forme indéterminée $"0\times(-\infty)"$

Deux cas sont à distinguer :

a) Si $x>1\Leftrightarrow x-1>0$, alors $\left(x^{2}-1\right)\ln\left|x-1\right|=\left(x^{2}-1\right)\ln\left(x-1\right)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x-1\right)=0^{+}$ et puisque $\lim\limits_{a\to0^{+}}a\ln a=0$ (limite célèbre du cours dite « de croissance comparée »), on aura donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)=0$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x+1\right)=2$, on en conclura par produit que $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x+1\right)\left(x-1\right)\ln\left(x-1\right)=0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(x^{2}-1\right)\ln\left|x-1\right|=0$

b) Si $x<1\Leftrightarrow x-1<0$, alors

$\left(x^{2}-1\right)\ln\left|x-1\right|=\left(x^{2}-1\right)\ln\left(1-x\right)=\left(x+1\right)\left(x-1\right)\ln\left(1-x\right)=-\left(x+1\right)\left(1-x\right)\ln\left(1-x\right)$.

Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x) = 0^+$ et puisque $\lim\limits_{a \to 0^+} a \ln a = 0$ (limite célèbre du cours dite « de croissance comparée »), on aura donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (1-x)\ln(1-x) = 0$. Puisque $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} -(x+1) = -2$, on en conclura par produit que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} -(x+1)(1-x)\ln(1-x) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} (x^2-1)\ln|x-1| = 0$

Dans tous les cas, on conclut que $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} (x^2-1)\ln|x-1| = 0}$

<u>Exercice n°6</u>

1) a) La fonction *f* est définie pour toutes les valeurs de *x* pour lesquelles $x+3 \neq 0$.

Ainsi $\boxed{D_f =]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[}$

b) La fonction φ n'est pas surjective car 2 n'admet aucun antécédent par φ.

En effet l'équation $\varphi(x) = 2 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{x+3} = 2 \Leftrightarrow 2x-5 = 2(x+3) \Leftrightarrow 2x-5 = 2x+6 \Leftrightarrow -5 = 6$ n'admet aucune solution dans D_f

En revanche, cette fonction est injective.

En effet, si *a* et *b* sont deux éléments de D_f, on aura :

$$\boxed{\varphi(a) = \varphi(b)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a-5}{a+3} = \frac{2b-5}{b+3}$$
$$\Leftrightarrow (2a-5)(b+3) = (2b-5)(a+3)$$
$$\Leftrightarrow 2ab + 6a - 5b - 15 = 2ab + 6b - 5a - 15$$
$$\Leftrightarrow 11b = 11a$$
$$\boxed{\Leftrightarrow b = a}$$

Puisque $\varphi(a) = \varphi(b) \Rightarrow a = b$, la fonction φ est injective.

N'étant pas surjective, elle n'est pas bijective.

c) Pour tout réel *x* non nul , on a $f(x) = \frac{2x-5}{x+3} = \frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \frac{2-\frac{5}{x}}{1+\frac{3}{x}}$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{5}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$, on en déduit par somme et quotient que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$

De même, puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{x} = 0$, on en déduit par somme et quotient que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

De plus, $\lim\limits_{x \to -3} 2x-5 = -11$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} x+3 = 0^-$ d'où par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x<-3}} f(x) = +\infty$, et enfin $\lim\limits_{x \to -3} 2x-5 = -11$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} x+3 = 0^+$ d'où par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x>-3}} f(x) = -\infty$.

La fonction *f* est dérivable sur son ensemble de définition D_f en tant que fraction rationnelle et pour tout $x \in D_f$, puisque $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x-5 \Rightarrow u'(x) = 2$ et $v(x) = x+3 \Rightarrow v'(x) = 1$, on aura :

Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{2(x+3)-(2x-5)\times 1}{(x+3)^2} = \frac{11}{(x+3)^2}$

Puisque pour tout $x \in D_f$, $(x+3)^2 > 0$, on en déduit que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) > 0$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur }]-\infty;-3[\text{ et sur }]-3;+\infty[}$.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

2) Puisque pour tout réel x, $x^2+3>0$, la fonction g sera définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi $D_g=\mathbb{R}$.

D_g est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x\in D_g$, $g(-x)=\dfrac{2(-x)^2-5}{(-x)^2+3}=\dfrac{2x^2-5}{x^2+3}=g(x)$

La fonction g est donc paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0;+\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que fraction rationnelle et pour tout $x\in[0;+\infty[$, puisque $g(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x^2-5\Rightarrow u'(x)=4x$ et $v(x)=x^2+3\Rightarrow v'(x)=2x$, on aura :

Pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\dfrac{4x(x^2+3)-(2x^2-5)\times 2x}{(x^2+3)^2}=\dfrac{22x}{(x^2+3)^2}$

Puisque pour tout $x\in[0;+\infty[$, $(x+3)^2>0$, on en déduit que pour tout $x\in[0;+\infty[$, $g'(x)\geq 0$

De plus, puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)>0$, on en déduit que g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et par parité, strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

Elle atteint en 0 un minimum égal à $g(x)=\dfrac{2\times 0^2-5}{0^2+3}=-\dfrac{5}{3}$

De plus, pour tout réel x non nul,

$$g(x)=\frac{2x^2-5}{x^2+3}=\frac{x^2\left(2-\frac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}.$$

Puisque $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$, donc par somme et quotient, que $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\dfrac{2}{1}=2$.

Le tableau de variations de g est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$	2	$\searrow$	$-\dfrac{5}{3}$	$\nearrow$	2

3) La fonction h est définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $\frac{2x-5}{x+3}$ existe et $\frac{2x-5}{x+3}>0$.

En dressant le tableau de signes de l'expression $\frac{2x-5}{x+3}$:

x	$-\infty$		-3		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2x-5}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que h est définie sur $D_h =]-\infty;-3[\cup \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

Dans la question 1) nous avons établi que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x+3}=2$. Puisque $\lim\limits_{X\to 2} \ln X = \ln 2$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\ln 2$.

De même, dans la question, nous avons montré que $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{x+3}=2$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\ln 2$

Dans la question 1) nous avons établi que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} \frac{2x-5}{x+3}=+\infty$. Puisque $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} h(x)=+\infty$.

De plus, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{5}{2}\\x>\frac{5}{2}}} 2x-5=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{5}{2}\\x>\frac{5}{2}}} x+3=\frac{11}{2}$, d'où par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{5}{2}\\x>\frac{5}{2}}} \frac{2x-5}{x+3}=0^+$ et puisque $\lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$, on en conclut par composition que $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{5}{2}\\x>\frac{5}{2}}} h(x)=-\infty$

Pour tout $x\in D_h$, $h(x)=\ln f(x)$.

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, les fonctions f et h auront même sens de variation sur D_h.

En reprenant le sens de variations de f établi dans la question 1), on conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;-3[\text{ et sur } \left]\frac{5}{2};+\infty\right[}.$$

<u>Fin du corrigé</u>