CONCOURS D'ADMISSION
A
L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES
ET AUX
ECOLES DE FORMATION DES OFFICIERS
DES CORPS TECHNIQUES ET ADMINISTRATIFS
DE L'ARMEMENT, DE L'ARMEE DE TERRE,
DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES ET
DU SERVICE DES ESSENCES DES ARMEES
(RECRUTEMENT SEMI-DIRECT)
EN 2007

CONCOURS E.M.I.A. SCIENCES
&
C.T.A./S.D. SCIENTIFIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(EMIA : coefficient 14 - CTA : coefficient 16)
Durée : 4 heures
Mercredi 31 janvier 2007 de 08h00 à 12h00

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

On peut admettre un résultat que l'on ne réussit pas à démontrer et passer à la question suivante.

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 4 question 5.

Exercice 1. (4 points)

On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$$

1. Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution réelle z_1.
2. Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z) = (z - z_1)Q(z)$.
3. Démontrer que l'équation $Q(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
5. On note z_3 la $3^{\text{ième}}$ solution de l'équation $P(z) = 0$.

   Démontrer que les points du plan complexe A, B et C d'affixes respectives z_1, z_2 *et* z_3, sont alignés.

Exercice2. (6 points)

On considère les réels $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!} e^{1-t} dt$ pour tout n entier naturel.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout n entier naturel non nul,

   on a : $$I_n - I_{n-1} = -\frac{1}{n!}.$$
3. Montrer que pour tout n entier naturel on a : $I_n = e - \sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!}$
4. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $0 \leq I_n \leq \frac{2}{n!}$
5. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. (5 points)

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\mathfrak{C} = \{A, B, C, D, \Omega\}$. Un puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathfrak{C}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. A chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.

Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point Ω.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Ω_n l'événement « *la puce se trouve au point* Ω *à l'issue de son nième saut* ».

On définit de même les événements A_n, B_n, C_n et D_n. On notera $p_n = P(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$).

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier les égalités :

$$P(A_n) = P(B_n) = P(C_n) = P(D_n) = \frac{1}{4}(1 - p_n)$$

3. Montrer que $p_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - p_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On pose $q_n = p_n - \frac{1}{4}$. Montrer que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
5. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

Exercice 4. (5 points)

Dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm, on donne le point $P(2;1)$. Une droite passant par P coupe l'axe $(O,\vec{i})$ en A et l'axe $(O,\vec{j})$ en B, l'ordonnée de B étant supérieure à 1. On note θ la mesure en radians de l'angle $\widehat{OAB}$ telle que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et on appelle H le projeté orthogonal de P sur $(O,\vec{i})$.

1- Montrer que $AH = \frac{1}{\tan\theta}$. En déduire la longueur OA.

2- Montrer que $OB = 1 + 2\tan\theta$. En déduire, en fonction de $\tan\theta$, l'aire du triangle OAB.

3- Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (2 + \frac{1}{x})(1 + 2x)$. En étudiant son sens de variation, montrer que f admet un minimum dont on donnera la valeur.

4- Quelle est l'aire minimale du triangle OAB en cm^2?

5- Tracer sur le schéma le triangle OAB d'aire minimale.