CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

ET AUX

ECOLES DE FORMATION DES OFFICIERS

DES CORPS TECHNIQUES ET ADMINISTRATIFS

DE L'ARMEMENT, DE L'ARMEE DE TERRE,

DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES ET

DU SERVICE DES ESSENCES DES ARMEES

(RECRUTEMENT SEMI-DIRECT)

EN 2006

CONCOURS E.M.I.A. SCIENCES

&

C.T.A./S.D. SCIENTIFIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(EMIA : coefficient 14 - CTA : coefficient 16)
Durée : 4 heures
Mercredi 25 janvier 2006 de 08h00 à 12h00

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
On peut admettre un résultat que l'on ne réussit pas à démontrer et passer à la question suivante.

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 4 question 5.

Exercice 1. (4 points)

On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z) = z^4 - (1+\sqrt{2})z^3 + (2+\sqrt{2})z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1+\sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$
2. Exprimer $\dfrac{P(z)}{z^2}$ en fonction de $Z = z + \dfrac{1}{z}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z + \dfrac{1}{z} = 1 \quad et \quad z + \dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$
4. En déduire toutes les solutions de l'équation :
$$P(z) = 0$$
5. Ecrire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$.

Exercice2. (6 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right)$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Pour quelle valeur de u_0 la suite est-elle stationnaire ?
2. On pose $u_0 = 1$:
   a. Démonter les relations suivantes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{3}\right)^2$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n + \sqrt{3}\right)^2$$
   b. Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite strictement décroissante pour $n \geq 1$.
   c. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$
   a. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_{n+1} en fonction de v_1 et de n.
   b. Calculer la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver la limite de $(u_n)_n$.

Exercice 3. (3 points)

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés. On sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

a. Démontrer que la probabilité de tomber malade est égale à $\frac{5}{48}$.

b. Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non-vacciné ?

c. Le vaccin est-il efficace?

Exercice 4. (7 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right) \text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=0$$

1. Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0. f est-elle dérivable en 0 ?
2. Etudier le sens de variation de f et déterminer la limites de f en $+\infty$.
3. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de $f(x)=0$ dans $[e,+\infty[$.
4. Soit T la tangente à la courbe représentative (C) de f au point d'abscisse 1.
   Déterminer l'équation de T de la forme $y=ax+b$.
5. Tracer la courbe représentative (C) de f et la droite T dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (on prendra 2 cm pour unité).
6. Soit $\lambda \in]0,e]$. On pose $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{e} f(x)dx$.
   a. Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0,e]$.
   b. Calculer la limite de $I(\lambda)$ quand λ tend vers 0.
   c. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$.