CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

ET AUX

ECOLES DE FORMATION DES OFFICIERS

DES CORPS TECHNIQUES ET ADMINISTRATIFS

DE L'ARMEMENT, DE L'ARMEE DE TERRE,

DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES ET

DU SERVICE DES ESSENCES DES ARMEES

(RECRUTEMENT SEMI-DIRECT)

EN 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS / OPTION SCIENCES

(EMIA : coefficient 14 - CTA : coefficient 16)

Durée : 4 heures

Mardi 25 janvier 2005 de 08h00 à 12h00

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
On peut admettre un résultat que l'on ne réussit pas à démontrer et passer à la question suivante.

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 4 question II-5.

EXERCICE 1. (3 *points*).

Ecrire $1+i\sqrt{3}$ et $1-i$ sous la forme trigonométrique et simplifier:

$$z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}.$$

EXERCICE 2. (3 *points*).

Montrer que les points $A(4;2)$, $B\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ et $C\left(1+2\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right)$ sont alignés.

EXERCICE 3. (4 *points*).

Soit x un nombre réel tel que $x+\dfrac{1}{x}$ est entier.

Montrer que $x^{2005}+\dfrac{1}{x^{2005}}$ est un nombre entier.

On pourra calculer $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$ et développer $\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right).\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$.

EXERCICE 4. (10 *points*).

PARTIE I

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\dfrac{1}{2}\ln x$.

1. Etudier le sens de variations de f. Calculer les limites de f aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de f.
2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution ℓ dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier n tel que $\ell\in]n;n+1[$.
3. Déterminer le signe de $f(x)$.

PARTIE II

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par:

$$g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est continue en 0. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Montrer que $g\left(\frac{1}{\ell}\right)=\frac{1+4\ell}{8\ell^2}$. Dresser le tableau de variation de g.
4. Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de g aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{\ell}$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.
5. Représenter <u>succinctement</u> Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité 3 cm).

PARTIE III

Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

1. En intégrant par parties, calculer $\int_\alpha^1 x^2.\ln x\, dx$.
2. Calculer $I(\alpha)=\int_\alpha^1 g(x)\, dx$.
3. Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$. Exprimer le résultat sous forme d'une fraction irréductible. Interpréter le résultat.