CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

ET AUX

ECOLES DE FORMATION DES OFFICIERS

DES CORPS TECHNIQUES ET ADMINISTRATIFS

DE L'ARMEMENT, DE L'ARMEE DE TERRE,

DU SERVICE DE SANTE DES ARMEES ET

DU SERVICE DES ESSENCES DES ARMEES

(RECRUTEMENT SEMI-DIRECT)

EN 2004

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

CONCOURS / OPTION
SCIENCES

(EMIA : coefficient 14 - CTA : coefficient 16)

Durée : 4 heures

Mardi 09 mars 2004 de 08h00 à 12h00

L'usage de la calculatrice est interdit.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les exercices 1, 2, 3 et 4 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire . pour l'exercice 3, questions 3 & 4 ;
. pour l'exercice 4, question II-6.

EXERCICE 1.

En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation trigonométrique :

$$(E) \quad 4.\cos 2x - 6\cos x - 1 = 0$$

EXERCICE 2.

En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1+\frac{1}{2003^2}+\frac{1}{2004^2}} = 2004 - \frac{1}{2004}$$

EXERCICE 3.

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$$

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a:
$$P(z) = (z^2+3).Q(z).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique: 2 cm), les points A, B, C, D d'affixes respectives:
$$z_A = i\sqrt{3}; \qquad z_B = -i\sqrt{3}; \qquad z_C = 3+2i\sqrt{3}; \qquad z_D = \overline{z_C};$$
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Placer le point E sur le dessin.
Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et déterminer la nature du triangle BEC.

EXERCICE 4.

PARTIE I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$.

1. Etudier le sens de variation de g.
2. En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

PARTIE II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1+\ln x}{x}$. On appelle $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

1. Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=\frac{x}{2}$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
   Déterminer la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$. Montrer que (Δ) coupe $(\mathcal{C})$ en un point A que l'on précisera.
3. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe $(\mathcal{C})$ où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B.
5. Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α.
   Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse α est supérieur à 1.
   On admettra que $0{,}34<\alpha<0{,}35$.
6. Représenter <u>succinctement</u> la courbe $(\mathcal{C})$ et les droites (Δ) et (T).

PARTIE III

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $u_n=e^{\frac{n-2}{2}}$ pour tout $n\in IN$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est géométrique. En préciser le premier terme et la raison.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est croissante.

2. Pour tout $n\in IN$, on pose:
   $$v_n=\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)dx$$
   Donner une interprétation géométrique de v_n.
   Calculer v_n et montrer que la suite $(v_n)_{n\in IN}$ est arithmétique.