CONCOURS D'ADMISSION
A
L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES
EN 2003
(E.M.I.A)

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION : SCIENCES

(Coefficient 14)

Durée : 4 heures

Mercredi 12 mars 2003 de 08 heures à 12 heures

Seule l'utilisation de la calculatrice de poche scientifique non programmable à alimentation autonome et sans document d'accompagnement est autorisée. Le prêt de calculatrice entre candidat est formellement interdit.

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les exercices 1, 2, et 3 sont indépendants.

Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 3, questions I-4.2 & II-3.4

EXERCICE 1 (4 points)

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ dont le terme général est défini par:

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{t}{1+t^2}} dt$$

Le calcul explicite de u_n n'est pas demandé.

1. On considère la fonction f définie par $f(t) = \sqrt{\frac{t}{1+t^2}}$.

Déterminer le domaine de définition de f et montrer que f est strictement croissante sur $[0;1]$.

2.1. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a: $u_n \geq 0$.

2.2. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, et montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

2.3. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{2}}$, et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

EXERCICE 2 (6 points)

1. On note M_1 et M_2 les points du plan complexe d'affixes respectives:

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i$$

1.1. Mettre sous forme trigonométrique z_1 , z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1.2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

2. Soit l'équation (E) d'inconnue x :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cdot \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \sin x = 2$$

2.1. Montrer que: $\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$.

2.2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{R}$.

3. On considère le nombre:

$$a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

3.1. Calculer a^2 puis déterminer son module et son argument.

3.2. En déduire le module et l'argument de a .

EXERCICE 3 (10 points)

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

Partie I

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x)$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en 0, et calculer $f'(x)$.

2. Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \ln x + x - 3$.

2.1. Etudier le sens de variation de u .

2.2. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2; 3]$ et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2.3. En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3.1. Dresser le tableau de variations de f .

3.2. Exprimer $\ln \alpha$ comme un polynôme en α . Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$. En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

4.1. Etudier le signe de $f(x)$.

4.2. Tracer (C) .

Partie II

Soit F la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$. On appelle Γ la courbe représentative de F relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. Sans calculer $F(x)$, étudier le sens de variation de F sur $]0; +\infty[$.

1.2. Que peut-on dire des tangentes à Γ en ses points d'abscisses 1 et e^2 ?

2.1. Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = x \cdot \ln x - x$. Vérifier que h est une primitive sur $]0; +\infty[$ de $x \rightarrow \ln x$.

2.2. Montrer pour tout x strictement positif:

$$f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$$

2.3. En déduire l'expression de $F(x)$ en fonction de x .

3.1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} F(x)$.

3.2. Montrer que, pour tout x strictement supérieur à 1:

$$F(x) = x \ln x \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - \frac{3}{\ln x} \right) + 3$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

3.3. Dresser le tableau des variations de F .

3.4. Tracer Γ sur le même graphique que (C) .

4. Calculer en cm^2 , l'aire du domaine limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$.