CONCOURS D'ADMISSION

À

L'ÉCOLE MILITAIRE INTERARMES

ET AUX

ÉCOLES DE FORMATION DES OFFICIERS

DES CORPS TECHNIQUES ET ADMINISTRATIFS

DE L'ARMEMENT, DE L'ARMÉE DE TERRE,

DU SERVICE DE SANTÉ DES ARMÉES ET

DU SERVICE DES ESSENCES DES ARMÉES

(RECRUTEMENT SEMI-DIRECT)

EN 2008

CONCOURS E.M.I.A. SCIENCES

&

C.T.A./S.D. SCIENTIFIQUE

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

(EMIA : coefficient 14 - CTA : coefficient 16)
Durée : 4 heures
Mercredi 30 janvier 2008 de 08h00 à 12h00

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
On peut admettre un résultat que l'on ne réussit pas à démontrer et passer à la question suivante.

L'usage de la calculatrice est interdit.
Les exercices 1, 2, et 3 sont indépendants.
Papier millimétré obligatoire pour l'exercice 1 et l'exercice 2.

Exercice 1. **(6 points)**

1. On considère le polynôme $P(z)$ suivant :

$$P(z)=z^3-3z^2+3z+7$$

   - Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle z_1.
   - Déterminer un polynôme $Q(z)$ tel que $P(z)=(z-z_1)Q(z)$.
   - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=0$.

2. Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A,B,C et D d'affixes respectives :

$$z_A=-1\ ;\ z_B=2+i\sqrt{3}\ ;\ z_C=2-i\sqrt{3}\ ;\ z_D=3$$

   - Placer sur une figure les points A,B,C et D .
   - Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier votre réponse.
   - Calculer le complexe $\dfrac{z_C-z_A}{z_C-z_D}$.
   - Quelle est la nature du triangle DAC ?

Exercice 2 **(10 points)**

Les questions 2. et 3. peuvent être traitées indépendamment de la question 1.

1. Soit $q\in\mathbb{R}$, $q\neq 1$. On pose $a_n=1+q+q^2+\cdots+q^n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   - Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
   - On suppose que $|q|<1$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x-1}, \text{ pour tout } x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[.$$

On note par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

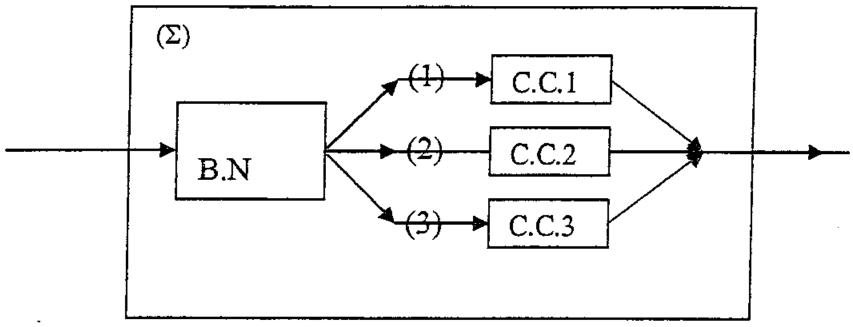
   - Résoudre l'équation $f(x)=x$ dans $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. On note par ϕ la racine de cette équation.
   - Déterminer le tableau de variations de f .

- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, est asymptote à (C) en $+\infty$.
- Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra 2 cm pour unité).

3. On considère la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   - Démontrer que $\phi \leq u_n \leq 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Démontrer que $(u_n)_n$ est une suite monotone.
   - En déduire que $(u_n)_n$ est une suite convergente.
   - Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{n+1} - \phi \leq \frac{1}{2}(u_n - \phi)^2$
   - Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

<u>Exercice 3.</u> (4 points)



Un système (Σ) est composé d'une boite noire $(B.N)$ où un signal entrant (E) est dirigé aléatoirement sur un seul canal (1), (2) ou (3). Sur chacun de ces canaux se trouve un coupe-circuit aléatoire (C.C.I).

On sait qu'il y a une chance sur 2 que le signal (E) passe par le canal (1).
On sait qu'il y a une chance sur 6 que le signal (E) passe par le canal (2).
On sait qu'il y a une chance sur 3 que le signal (E) passe par le canal (3).
On sait également qu'il y a :

- 2 chances sur 10 que le signal franchisse CC1 ;
- 9 chances sur 10 que le signal franchisse CC2;
- 5 chances sur 10 que le signal franchisse CC3.

1. Quelle est la probabilité que le signal (E) sorte du système (Σ) ?

2. Sachant que le signal est sorti de (Σ), quelle est la probabilité qu'il soit passé par le canal (2) ?